8 Razones trigonométricas de cualquier ángulo

1. Expresa los siguientes ángulos como suma de un número entero de vueltas y un ángulo menor que 360° ($2 \cdot \pi$):

$$-940° \qquad 3\,000° \qquad -27\pi \text{ rad} \qquad \frac{17\pi}{3} \text{ rad}$$

2. Indica en qué cuadrante están situados cada uno de los siguientes ángulos:

$$1\,780° \qquad -490° \qquad \frac{22\pi}{5} \text{ rad} \qquad -\frac{80\pi}{7} \text{ rad}$$

3. En una circunferencia de 20 m de radio, un arco mide 65 metros. Calcula en grados y radianes el ángulo central que le corresponde.

4. Dados los ángulos $\alpha = 78°$, $\beta = -260°$, $\gamma = 105°$, indica en qué cuadrante están situados los siguientes ángulos:

$$A = 5\alpha - 3\beta = 4\gamma \qquad B = \frac{3\alpha + \beta}{4} - \frac{\alpha - 2\gamma}{6}$$

5. Sin hacer uso de la calculadora, calcula el valor exacto de las expresiones:

$A = 3 \text{ sen } 270° + 4 \tan 135° - 2 \cos 300°$

$B = 2 \text{ sen } 315° - \tan 900° + 3 \cos 540°$

$C = \sqrt{2} \cdot \text{sen } 135° + \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \tan 240° - \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \cos 315°$

6. Sabiendo que α es un ángulo agudo, tal que $\cos \alpha = 0{,}6$, calcula las siguientes razones trigonométricas:

$$\cos(180° + \alpha) \qquad \text{sen}(180° - \alpha) \qquad \tan(90° - \alpha) \qquad \text{sen}(900° - \alpha)$$

7. Con ayuda de la calculadora y utilizando el modo angular en grados, halla, con tres cifras decimales significativas, los valores de las siguientes razones trigonométricas:

$$\cos 385° \qquad \tan\frac{18\pi}{7} \qquad \text{sen}(-2\,050°) \qquad \cos\frac{13\pi}{3}$$

8. Calcula el valor del seno y el coseno de un ángulo del cuarto cuadrante cuya tangente vale $-\frac{3}{4}$. Expresa las soluciones en forma fraccionaria.

9. Halla, sin hacer uso de la calculadora, qué ángulos de la circunferencia goniométrica cumplen las siguientes condiciones:

a) Su seno vale $-\dfrac{1}{2}$ b) Su coseno vale $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ c) Su tangente vale -1

10. Halla los ángulos x tales que $0° \leqslant x < 360°$, si verifican las igualdades siguientes:

a) $\text{sen}(2x + 60°) = -\dfrac{1}{2}$ b) $\tan\dfrac{5x - 40°}{2} = -1$

SOLUCIONES

1. $-940° = -2 \cdot 360° - 220° = -3 \cdot 360° + 140°$
$-27\pi = -13 \cdot 2\pi - \pi = -14 \cdot 2\pi + \pi$
$3\,000° = 8 \cdot 360° + 120°$
$\dfrac{17\pi}{3} = 2 \cdot 2\pi + \dfrac{5\pi}{3}$

2. $1\,780° = 4 \cdot 360° + 340°$. Está situado en el tercer cuadrante.

$-4\,900° = -13 \cdot 360° - 220° = -14 \cdot 360° + 140°$. Está situado en el segundo cuadrante.

$\dfrac{22\pi}{5} = 2 \cdot 2\pi + \dfrac{2\pi}{5}$. Está situado en el primer cuadrante.

$-\dfrac{80\pi}{7} = -5 \cdot 2\pi - \dfrac{10\pi}{7} = -6 \cdot 2\pi + \dfrac{4\pi}{7}$. Está situado en el segundo cuadrante.

3. El ángulo en grados es:
$\alpha = 360° \cdot \dfrac{L_{arco}}{L_{circunf}} = 360° \cdot \dfrac{65}{40\pi}$; $\alpha = 186°\ 12'\ 41''$

El ángulo en radianes es:
$\alpha = 2\pi \cdot \dfrac{L_{arco}}{L_{circunf}} = 2\pi \cdot \dfrac{65}{40\pi}$; $\alpha = 3{,}25$ rad

4. $A = 5\alpha - 3\beta - 4\gamma = 5 \cdot 78° - 3 \cdot (-260°) - 4 \cdot 105° = 750° = 2 \cdot 360° + 30°$
Es del primer cuadrante.

$B = \dfrac{3\alpha + \beta}{4} - \dfrac{\alpha - 2\gamma}{6} = \dfrac{7\alpha + 3\beta + 2\gamma}{12} =$
$= \dfrac{7 \cdot 78° + 3 \cdot (-260°) + 2 \cdot 105°}{12} = -2°$
Es del cuarto cuadrante.

5. $A = 3 \text{ sen } 270° + 4 \tan 135° - 2 \cos 300° =$
$= 3 \cdot (-1) + 4 \cdot (-1) - 2 \cdot \dfrac{1}{2} = -8$

$\left.\begin{array}{l} 900° = 2 \cdot 360° + 180° \\ 1\,125° = 3 \cdot 360° + 45° \end{array}\right\}$

$B = 2 \text{ sen } 315° - \tan 900° + 3 \cos 540° =$
$= 2 \text{ sen } 315° - \tan 180° + 3 \cos 45° =$
$= 2 \cdot \dfrac{-\sqrt{2}}{2} - 0 + 3 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$C = \sqrt{2} \cdot \text{sen } 135° + \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \tan 240° - \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \cos 315° =$
$= \sqrt{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{3} - \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{7}{6}$

6. Aplicando la relación fundamental, se tiene:
$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; $\text{sen } \alpha = \sqrt{1 - 0{,}64^2} = 0{,}6$
$\cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha = -0{,}64$
$\tan(90° - \alpha) = \dfrac{\text{sen}(90° - \alpha)}{\cos(90° - \alpha)} = \dfrac{\cos\alpha}{\text{sen } \alpha} = \dfrac{0{,}8}{0{,}6} = \dfrac{4}{3}$
$\text{sen}(180° - \alpha) = \text{sen } \alpha = 0{,}6$
$\text{sen}(900° - \alpha) = \text{sen}(2 \cdot 360° + 180° - \alpha) =$
$= \text{sen}(180° - \alpha) = 0{,}6$

7. $\cos 385° = 0{,}906$; $\tan \dfrac{18\pi}{7} = \tan \dfrac{3\,240°}{7} = -4{,}381$
$\text{sen}(-2\,050°) = 0{,}940$; $\cos \dfrac{13\pi}{3} = \cos 780° = 0{,}5$

8. De la relación $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{1 + \tan^2\alpha}$ se tiene:
$\cos\alpha = \sqrt{\dfrac{1}{1 + \dfrac{9}{16}}} = \dfrac{4}{5}$

De la definición de tangente $\tan\alpha = \dfrac{\text{sen } \alpha}{\cos\alpha}$:
$\text{sen } \alpha = \tan\alpha \cdot \cos\alpha = -\dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{4}{5} = -\dfrac{3}{5}$

9. a) De $\text{sen } 30° = \dfrac{1}{2}$, si $\text{sen } \alpha = -\dfrac{1}{2}$,
$\left\{\begin{array}{l} \alpha = 180° - 30° = 150° \\ \alpha = 180° + 30° = 210° \end{array}\right.$

b) De $\cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, si $\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,
$\left\{\begin{array}{l} \alpha = 30° \\ \alpha = 360° - 30° = 330° \end{array}\right.$

c) De $\tan 45° = 1$, si $\tan\alpha = -1$,
$\left\{\begin{array}{l} \alpha = 180 - 45° = 135° \\ \alpha = 360° - 45° = 315° \end{array}\right.$

10. a) $\text{sen}(2x + 60°) = -\dfrac{1}{2}$
$\left\{\begin{array}{l} 2x + 60° = 210°;\ x = 75° \\ 2x + 60° = 300°;\ x = 120° \end{array}\right.$

b) $\tan \dfrac{5x - 40°}{2} = -1$
$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{5x - 40°}{2} = 135°;\ x = 62° \\ \dfrac{5x - 40°}{2} = 315°;\ x = 134° \end{array}\right.$