7 Razones trigonométricas de ángulos agudos

1. Calcula la medida, en grados y radianes, de cada uno de los siguientes ángulos:

a) El ángulo de un triángulo equilátero.

b) Los ángulos de un rombo, uno de los cuales mide 30°.

2. Utiliza la calculadora para hallar x en cada uno de los siguientes casos, determinando los ángulos agudos con una precisión de segundos y redondeando las razones angulares a las milésimas:

$$x = \tan 35^\circ\ 10'; \ \cos x = 0{,}27; \ x = \operatorname{sen} 75^\circ; \ x = \cos \frac{\pi}{12}; \ \operatorname{sen} x = 0{,}8; \ \tan x = 7{,}35$$

3. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 13 cm, y uno de sus catetos, 12 cm. Halla las razones trigonométricas del ángulo opuesto al cateto menor y el área del triángulo. Haz un dibujo explicativo de los cálculos realizados.

4. Las rectas tangentes a una circunferencia desde un punto exterior, que dista del centro 50 m, forman un ángulo de 48°. Teniendo en cuenta que las rectas tangentes son perpendiculares a los radios en el punto de tangencia, halla el área del círculo. Haz un dibujo aproximado que te ayude en tus cálculos.

5. Calcula el valor de las razones desconocidas del ángulo agudo α en los siguientes casos:

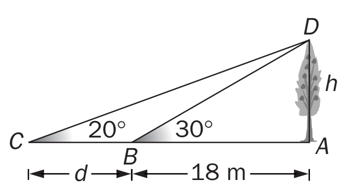
a) $\operatorname{sen} \alpha = h = 0{,}8$ b) $\cos \alpha = h = \dfrac{1}{3}$ c) $\tan \alpha = h = \dfrac{4}{3}$

6. Si x es un ángulo agudo, simplifica todo lo que sea posible las siguientes expresiones:

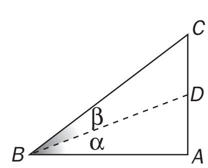
$$A = \frac{1 + \cos x}{1 - \operatorname{sen} x} \cdot \frac{1 - \cos x}{1 + \operatorname{sen} x} \qquad B = \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen} x} - \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos x}$$

7. Las medidas, en metros, de las diagonales de un rombo son proporcionales a los números 6 y 8. Con esos datos, halla los dos ángulos del rombo. Haz un dibujo que te ayude a resolver el problema.

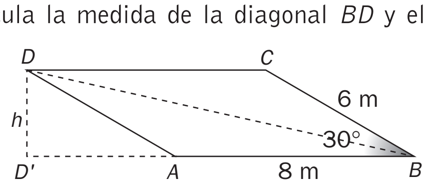
8. Se observa la copa, D, de un árbol desde un punto, B, del suelo, bajo un ángulo de 30°. El punto B dista 18 m del pie, A, del árbol. ¿Cuál es su altura? ¿A qué distancia d del punto B en la línea AB tendríamos que situarnos para observar su copa desde un punto C con un ángulo de 20°?



9. En la figura, el ángulo $\widehat{A}$ es de 90°, y los segmentos AD y DC tienen la misma medida. ¿Son iguales los ángulos α y β? Razona tu respuesta.



10. En el paralelogramo $ABCD$, calcula la medida de la diagonal BD y el área del paralelogramo.



SOLUCIONES

1. a) $\alpha = \frac{180°}{3} = 60° \Rightarrow \frac{x}{\pi} = \frac{\alpha}{180°} \Rightarrow x = \frac{60\pi}{180} = \frac{\pi}{3}$ rad

b) Si $\alpha = 30°$, $\beta = 150°$. En radianes:

$$\begin{cases} \frac{x}{\pi} = \frac{\alpha}{180°} \Rightarrow x = \frac{30\pi}{180} = \frac{\pi}{6} \text{ rad} \\ y = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \text{ rad} \end{cases}$$

2. $x = \tan 35°\ 10' = 0{,}705$

$\cos x = 0{,}27$; $x = 74°\ 20'\ 9''$

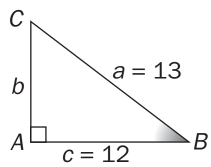
$x = \text{sen } 75° = 0{,}966$

$x = \cos \frac{\pi}{12} = \cos 15° = 0{,}966$

$\text{sen } x = 0{,}8$; $x = 53°\ 7'\ 48''$

$\tan x = 7{,}35$; $x = 82°\ 15'\ 8''$

3. En el triángulo ABC, rectángulo en A, por el teorema de Pitágoras, se tiene: $b = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$ cm. Se trata de hallar las razones del ángulo $\widehat{B}$.



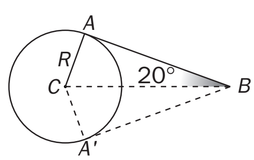
$\text{sen } B = \frac{b}{a} = \frac{5}{13}$

$\cos B = \frac{c}{a} = \frac{12}{13}$

$\tan B = \frac{b}{c} = \frac{5}{12}$.

Área: $S = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 30$ cm^2

4. Los triángulos ABC y $A'BC$ son iguales y rectángulos en A y A'.



En ABC se tiene:

$\text{sen } 24° = \frac{CA}{CB}$; $0{,}41 = \frac{R}{50}$; $R = 20{,}50$ m

El área del círculo es: $S = \pi R^2$; $S = 1\,320$ m^2

5. a) $\cos \alpha = \sqrt{1 - h^2} = \sqrt{1 - 0{,}64} = 0{,}6$

$\tan \alpha = \frac{h}{\sqrt{1 - h^2}} = \frac{0{,}8}{0{,}6} = 1{,}33$

b) $\text{sen } \alpha = \sqrt{1 - h^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = 0{,}94$

$\tan \alpha = \frac{\sqrt{1 - h^2}}{h} = \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{9}}}{\frac{1}{3}} = 2{,}83$

c) $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + h^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{16}{9}}} = 0{,}6$

$\text{sen } \alpha = h \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + h^2}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2}} = 0{,}8$

6. $A = \frac{(1 + \cos x)(1 - \cos x)}{(1 - \text{sen } x)(1 + \text{sen } x)} = \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \text{sen}^2 x} =$

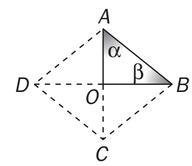
$= \frac{1 - (1 - \text{sen}^2 x)}{1 - \text{sen}^2 x} = \frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \tan^2 x$

$B = \frac{\cos^4 x - \text{sen}^4 x}{\text{sen } x \cdot \cos x} =$

$= \frac{(\cos^2 x + \text{sen}^2 x)(\cos^2 x - \text{sen}^2 x)}{\text{sen } x \cdot \cos x} =$

$= \frac{\cos^2 x - \text{sen}^2 x}{\text{sen } x \cdot \cos x} = \frac{1}{\tan x} - \tan x$

7. $AC = 6k$ y $BD = 8k$. En el triángulo rectángulo OAB, se tiene:



$\tan \alpha = \frac{OB}{OA} = \frac{4k}{3k} = \frac{4}{3}$

$\alpha = 53°\ 7'\ 48''$

Por tanto, $\beta = 90° - \alpha = 36°\ 52'\ 12''$

Los ángulos del rombo son, por tanto:

$\widehat{DAB} = 2\alpha = 106°\ 15'\ 36''$

$\widehat{ABC} = 2\beta = 73°\ 44'\ 24''$

8. En el triángulo rectángulo ABD se tiene:

$\tan 30° = \frac{DA}{BA} = \frac{DA}{18}$

$DA = 10{,}39$ m, que es la altura del árbol.

En el triángulo ACD se tiene:

$\tan 20° = \frac{DA}{CA} = \frac{10{,}39}{18 + d}$

$d = 10{,}55$ m, que es la distancia entre C y B.

9. No son iguales, para ello ponemos el siguiente ejemplo: $AB = 4$ y $AD = DC = 3$; se tiene:

En ABD: $\tan \alpha = \frac{AD}{AB} = \frac{3}{4} \Rightarrow \alpha \approx 36°\ 52'\ 12''$

En ABC: $\tan (\alpha + \beta) = \frac{AC}{AB} = \frac{6}{4}$

$\alpha + \beta \approx 56°\ 18'\ 36''$

Por tanto:

$\beta = (\alpha + \beta) - \alpha = 56°\ 18'\ 36'' - 36°\ 52'\ 12'' =$

$= 19°\ 26'\ 24'' \neq \alpha$

10. En el triángulo $D'AD$:

$$\begin{cases} \text{sen } A = \frac{h}{6};\ h = 6 \cdot \text{sen } 30° = 3 \text{ m} \\ \cos A = \frac{D'A}{6};\ D'A = 6 \cdot \cos 30° = 5{,}20 \text{ m} \end{cases}$$

La diagonal mide $BD = \sqrt{h^2 + (8 + AD')^2} =$

$= 13{,}53$ m, y el área, $S = h \cdot AB = 24$ m^2.