6 La semejanza en el plano

1. Dibuja sobre una recta tres puntos *A*, *B* y *C*, de forma que los segmentos *AB* y *AC* tengan una razón igual a $\frac{3}{2}$. ¿En qué teorema te basas para la construcción?

2. Un padre y su hijo contemplan una torre de 45 metros de altura. El padre tiene una altura de 1,80 m y proyecta una sombra de 50 cm. El hijo proyecta una sombra de 30 cm. Se pide:

a) ¿Qué altura tiene el hijo?

b) ¿Cuánto mide la sombra que proyecta la torre en ese momento del día?

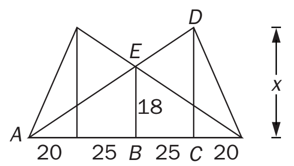
3. Se ha hecho una fotocopia, reducida al 40 %, de un plano en el que aparece dibujado un rectángulo. Como el dibujo aparece muy pequeño, se ha hecho una ampliación de la fotocopia del plano al 150 %, de modo que en ella los lados del rectángulo miden 3 cm y 4 cm. Calcula el área del rectángulo original que aparece en el plano.

4. En un papel rectangular de 90×60 centímetros se dibuja un rectángulo semejante al contorno del papel y centrado respecto a los lados, cuya área es de 2 400 cm^2. ¿A qué distancia de los bordes del papel quedan los lados del rectángulo?

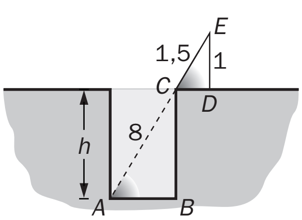
5. Las bases de un trapecio isósceles miden 18 cm y 30 cm, y la altura, 6 cm. Calcula la altura del triángulo que tiene como lados la base menor del trapecio y las prolongaciones de sus lados no paralelos.

6. La base de un triángulo isósceles mide 6 cm, y la altura correspondiente a uno de los lados iguales mide 4 cm. Halla el área del triángulo y el área de otro semejante tal que la razón de semejanza respecto del anterior sea de 1,2.

7. La figura muestra parte de la estructura del entramado de la nave de una fábrica. Con las medidas que se dan, en metros, determina la altura *x* de la misma.

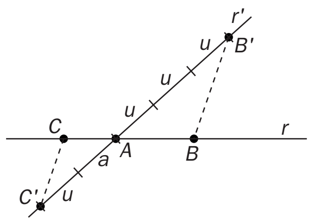


8. Para medir la capacidad de un pozo cilíndrico, un agricultor introduce un palo recto de 9,5 m de largo, según se indica en la figura, de forma que la parte *CD* que sobresale mide 1,5 m, y el extremo del palo, *D*, está situado a 1 m del suelo. Calcula cuántos litros es capaz de almacenar el pozo.



SOLUCIONES

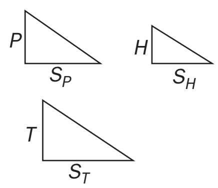
1. Dibujamos r y r'.



Trazamos sobre r' $AB' = 3$ y $AC' = 2$. Las paralelas, por B' y C', cortan a r en B y C, respectivamente. Por el teorema de Tales, se tiene:

$$\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'} \Rightarrow \frac{AB}{3} = \frac{AC}{2} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{3}{2}$$

2. Sean P, H y T las alturas del padre, el hijo y la torre, respectivamente, y S_P, S_H y S_T las longitudes de sus respectivas sombras, en centímetros. Por semejanza:

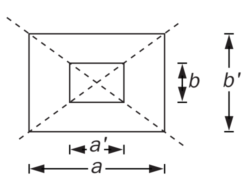


$$\frac{P}{S_P} = \frac{H}{S_H} = \frac{T}{S_T} \Rightarrow \frac{180}{50} = \frac{H}{30} = \frac{4\,500}{S_T} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow H = 108 \text{ cm}; \; S_T = 1\,250 \text{ cm}$$

3. Sean L y L' las longitudes, en centímetros, del objeto original y de la última fotocopia, y S y S' sus respectivas superficies. Se tiene:

$$\frac{L}{L'} = 0,4 \cdot 1,5 = 0,6; \; \frac{S}{S'} = 0,6^2 = 0,36 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{S}{12} = 0,36 \Rightarrow S = 4,32 \text{ cm}^2$$

4. Sean S y S' las superficies de la hoja de papel y del rectángulo, respectivamente. Su razón es:

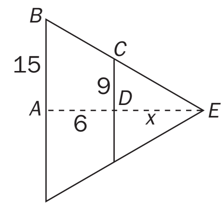


$$\frac{S}{S'} = \frac{90 \cdot 60}{2\,400} = 2,25, \text{ por tanto:}$$
$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \sqrt{2,25} = 1,5$$
$$a' = 60 \text{ cm}; \; b' = 40 \text{ cm}.$$

Al estar centrados, las separaciones son:

$$\frac{a - a'}{2} = 15 \text{ cm}; \; \frac{b - b'}{2} = 10 \text{ cm}$$

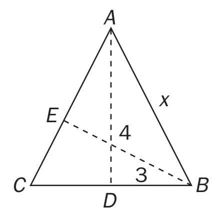
5. Los triángulos rectángulos AEB y DEC están en posición de Tales. Se tiene: $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{AE}{DE} \Rightarrow$



$$\Rightarrow \frac{15}{9} = \frac{6 + x}{x}$$

$x = 9$ cm, que es la medida de la altura.

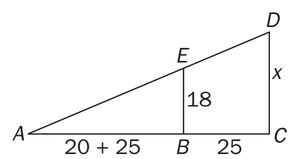
6. Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo DAB: $AD = \sqrt{x^2 - 9}$. El área S del triángulo puede calcularse de dos formas:



$$S = \frac{AC \cdot BE}{2} = \frac{CB \cdot AD}{2}$$
$$2x = 3\sqrt{x^2 - 9}$$
$$x = \sqrt{16,2} = 4,02 \text{ cm}$$

Su área vale $S = \dfrac{4,02 \cdot 4}{2} = 8,05 \text{ cm}^2$. El área del otro triángulo es: $S' = 8,05 \cdot 1,2^2 = 11,59 \text{ cm}^2$

7. Tomando los triángulos ACD y ABE, semejantes, por estar en posición de Tales, se puede escribir:



$$\frac{CD}{EB} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \frac{x}{18} = \frac{70}{45}$$
$$x = 28 \text{ m}$$

8. Los triángulos rectángulos ABC y CDE son semejantes. Si h es la profundidad del pozo, se tiene:

$$\frac{h}{1} = \frac{8}{1,5} \Rightarrow h = 5,33 \text{ m}$$

El diámetro del pozo es: $AB = \sqrt{8^2 - h^2} = 5,96$ m

El volumen es:

$$V = \pi \cdot \left(\frac{AB}{2}\right)^2 \cdot h = 148,624 \text{ m}^3 = 148\,624 \text{ litros}$$