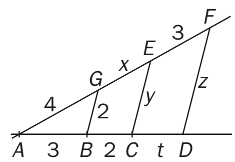
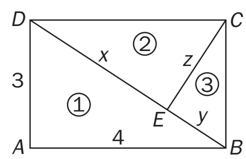
6 La semejanza en el plano

1. Calcula las medidas de los segmentos *x*, *y*, *z*, *t* en la siguiente figura, sabiendo que las medidas de los segmentos conocidos están expresadas en metros.

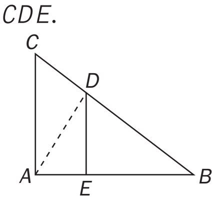


2. Dibuja un hexágono regular y, tomando como vértices los puntos medios de sus lados, traza un nuevo hexágono. ¿Son semejantes ambos hexágonos? ¿Cuál es la razón de semejanza entre ambas figuras? Si el primero tiene 6 cm de lado, calcula el área del segundo hexágono.

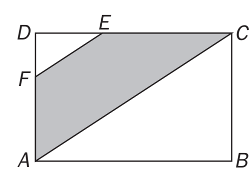
3. Demuestra que en cualquier rectángulo *ABCD* se pueden determinar tres triángulos semejantes 1, 2 y 3 como indica la figura, trazando desde un vértice la perpendicular a la diagonal opuesta. Basándote en ello, calcula las longitudes *x*, *y*, *z* del rectángulo de la figura.



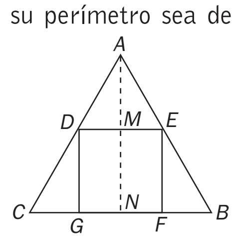
4. En el triángulo rectángulo *ABC* rectángulo en *A*, cuyos catetos *AC* y *AB* miden, respectivamente, 6 y 8 m, se traza la altura *AD* y desde *D* se traza una paralela al cateto *AC*, que corta en *E* al otro cateto *AB*. Calcula el perímetro y el área del trapecio de vértices *ACDE*.



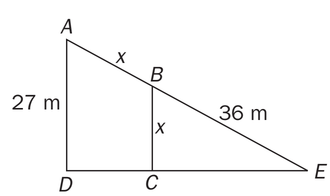
5. En el rectángulo *ABCD*, cuyos lados miden $AB = 24$ cm y $BC = 10$ cm, se traza una paralela *EF* a la diagonal *AC*. Sabiendo que $DF = 4$ cm, ¿cuánto miden el perímetro y el área del trapecio *ACEF*?



6. En un triángulo isósceles *ABC*, cuyos lados iguales $AB = AC$ miden 10 cm y el lado básico *BC* mide 12 cm, se inscribe un rectángulo *DEFG* centrado respecto a la altura del triángulo, como indica la figura. Calcula las medidas de los lados del rectángulo para que su perímetro sea de 20 centímetros.



7. En el triángulo *ADE*, rectángulo en *D*, se construye el trapecio *ABCD* tal que los lados *AB* y *BC* tienen la misma medida, *x*. Calcula el perímetro del trapecio, teniendo en cuenta las medidas de los segmentos $AD = 27$ m y $BE = 36$ m.



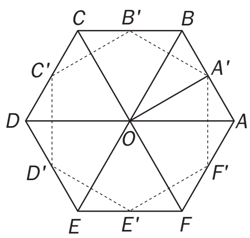
SOLUCIONES

1. Por el teorema de Tales:

$\dfrac{AG}{AB} = \dfrac{GE}{BC} = \dfrac{EF}{CD}$; $\dfrac{4}{3} = \dfrac{x}{2} = \dfrac{3}{t}$; $x = \dfrac{8}{3}$; $t = \dfrac{9}{4}$

$\dfrac{AB}{BG} = \dfrac{AC}{CE} = \dfrac{AD}{DF}$; $\dfrac{3}{2} = \dfrac{5}{y} = \dfrac{5+t}{z}$; $y = \dfrac{10}{3}$; $z = \dfrac{29}{6}$

2. Son semejantes por tener iguales sus ángulos interiores (120°). Si L y a_p son el lado y la apotema del dado, aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $OA'B$:



$$a_p = \sqrt{L^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2} = \sqrt{36 - 9} = \sqrt{27}$$

Su área es $S = 3L \cdot a_p = 18\sqrt{27}$

Como el lado del hexágono inscrito es $L' = a_p$, la razón de semejanza es $k = \dfrac{L}{L'} \cdot \dfrac{6}{\sqrt{27}}$.

El área S' del hexágono inscrito es:

$$\frac{S}{S'} = \frac{36}{27} \Rightarrow S' = \frac{3S}{4} \approx 70{,}14 \text{ cm}^2$$

3. En efecto, $\widehat{ABD} = \widehat{BDC}$ determinados por dos paralelas y una secante y $\widehat{ABD} = \widehat{ECD}$ de lados perpendiculares. En el triángulo 1: $BD = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

Por semejanza, en los triángulos 1 y 2:
$\dfrac{AD}{EC} = \dfrac{AB}{ED} = \dfrac{DB}{DC}$; $\dfrac{3}{z} = \dfrac{4}{x} = \dfrac{5}{4}$; $x = 3{,}2$ cm; $z = 2{,}4$ cm

Por semejanza, en los triángulos 1 y 3:
$\dfrac{AD}{EB} = \dfrac{AB}{EC} = \dfrac{DB}{BC}$; $\dfrac{3}{y} = \dfrac{4}{z} = \dfrac{5}{3}$; $y = 1{,}8$ cm

4. En ABC: $CB = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} CB \cdot CD = 6^2;\ CD = 3{,}6 \\ CB \cdot BD = 8^2;\ BD = 6{,}4 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow AD^2 = CD \cdot DB \Rightarrow AD = 4{,}8$

Por semejanza: $EDA \approx DAC$, se tiene

$$\frac{AD}{AC} = \frac{ED}{DA} = \frac{EA}{DC} \Rightarrow \frac{4{,}8}{6} = \frac{ED}{4{,}8} = \frac{EA}{3{,}6} \Rightarrow$$

$\Rightarrow ED = 3{,}84$; $EA = 2{,}88$

El perímetro es:

$P = AC + CD + DE + EA = 16{,}32$ m

El área es: $S = \dfrac{(AC + ED) \cdot AE}{2} \approx 14{,}17 \text{ m}^2$

5. En el triángulo ACD: $AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = 26$ cm, sean $EC = x$, $FA = 10 - 4 = 6$ cm y $EF = z$. Por la semejanza de los triángulos DEF y DAC:

$$\frac{FE}{AC} = \frac{DE}{DC} = \frac{DF}{AD} \Rightarrow \frac{z}{26} = \frac{24 - x}{24} = \frac{4}{10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 14{,}4;\ z = 10{,}4$$

El perímetro del trapecio es:

$$P = AF + FE + EC + CA = 56{,}8 \text{ cm}$$

El área es:

$$S_{AFEC} = S_{DCA} - S_{DEF} = \frac{1}{2} AD \cdot DC - \frac{1}{2} FD \cdot ED =$$

$$= 100{,}8 \text{ cm}^2$$

6. Los triángulos AME y ANB son semejantes por estar en posición de Tales: $\dfrac{AM}{AN} = \dfrac{ME}{NB}$

Por otro lado:

$$AN = \sqrt{AB^2 - NB^2} = \sqrt{100 - 36} = 8 \text{ cm}$$

y llamando $2x = DE$, $y = MN$, de la relación de Tales, se tiene: $\dfrac{8 - y}{8} = \dfrac{x}{6} \Rightarrow y = \dfrac{4(6 - x)}{3}$

Teniendo en cuenta que el perímetro es 20 cm:

$$4x + 2y = 20 \Rightarrow 4x + \frac{8(6 - x)}{3} = 20 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{x = 3;\ y = 4\}$$

Los lados del rectángulo miden 6 cm y 4 cm.

7. Los triángulos DAE y CBE están en posición de Tales: $\dfrac{AE}{BE} = \dfrac{AD}{BC} \Rightarrow \dfrac{x + 36}{36} = \dfrac{27}{x}$, cuya única solución posible es $x = 18$ m.

Por otro lado:

$$DC = DE - CE = \sqrt{AE^2 - AD^3} - \sqrt{BE^2 - BC^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow DC = \sqrt{54^2 - 27^2} - \sqrt{36^2 - 18^2} \approx 15{,}59$$

El perímetro es:

$p = DA + AB + BE + CD \approx 27 + 18 + 18 + 15{,}59$ de valor aproximado 78,59 m.