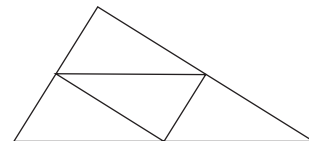
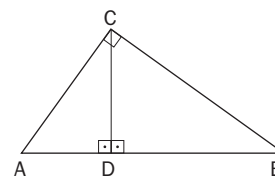
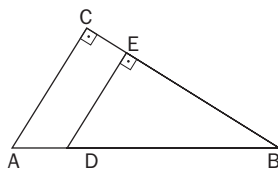
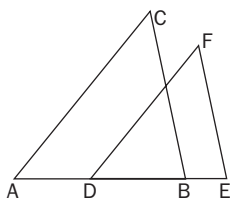


6 Figuras semejantes. Teorema de Tales

- La base y la altura de un rectángulo miden, respectivamente, 12 y 8 cm. Sabemos que otro rectángulo semejante al dado tiene un área de 54 cm^2 . ¿Cuánto miden los lados del segundo rectángulo?
- Si incrementamos un 20% la longitud de cada uno de los lados de un triángulo cualquiera obtenemos un nuevo triángulo. Averigua si ambos triángulos son semejantes y halla, en su caso, la razón de semejanza.
- En un triángulo cualquiera unimos los puntos medios de los lados, formándose cuatro triángulos. Demuestra que los cuatro son iguales y, a su vez, semejantes al triángulo inicial. Halla la razón de semejanza.



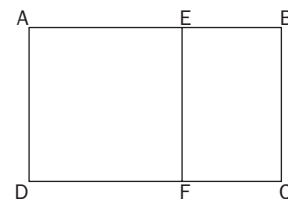
- Determina, utilizando los criterios de semejanza, en qué casos son semejantes los siguientes triángulos:
 - ABC y DEF
 - ABC y DBE
 - ABC y ACD



- Las bases de un trapecio isósceles miden 20 y 30 cm, respectivamente, y los lados iguales, 6 cm. Si prolongamos dichos lados hasta que se corten obtenemos un triángulo.
 - ¿Qué tipo de triángulo es?
 - ¿Cuánto miden los lados de este triángulo?

- Calcula las dimensiones de un rectángulo cuya diagonal mide 10 cm, sabiendo que es semejante a otro rectángulo cuya base mide 4 cm y su altura 3 cm.
- Consideramos un rectángulo. Trazando un segmento paralelo al lado menor, lo dividimos en un cuadrado y otro rectángulo como muestra la figura.

¿En qué condiciones los rectángulos $ABCD$ y $EBCF$ son semejantes?
Halla, en su caso, la razón de semejanza. ¿Sabes cómo se llama este resultado?



- Divide gráficamente un segmento \overline{AB} de 60 mm de longitud en dos partes que sean proporcionales a dos segmentos de longitudes 3 y 7 cm, respectivamente.
- Dados tres segmentos de longitudes a , b y c , respectivamente, se llama cuarto proporcional a los tres a un segmento de longitud x que verifica la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$. Halla gráficamente el segmento cuarto proporcional a los segmentos de longitud $a = 2 \text{ cm}$, $b = 2,5 \text{ cm}$ y $c = 3 \text{ cm}$.
- Dados dos segmentos de longitudes a y b , respectivamente, se llama tercero proporcional a los dados a un segmento de longitud x que verifica la proporción $\frac{a}{b} = \frac{b}{x}$. Explica cómo se halla gráficamente el segmento tercero proporcional a los segmentos de longitud $a = 10 \text{ mm}$ y $b = 16 \text{ mm}$.

SOLUCIONES

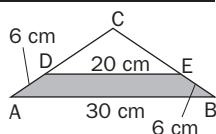
$$1. \begin{cases} \frac{12}{x} = \frac{8}{y} \\ xy = 54 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{2x}{3} \Rightarrow \frac{2x^2}{3} = 54 \Rightarrow x^2 = 81 \Rightarrow x = 9 \text{ m}, y = 6 \text{ cm}$$

2. Si los lados del primer triángulo miden a , b y c , los del segundo medirán $1,2a$, $1,2b$ y $1,2c$, con lo que $\frac{a}{1,2a} = \frac{b}{1,2b} = \frac{c}{1,2c} = \frac{5}{6}$ son triángulos semejantes, y la razón de semejanza es $\frac{5}{6}$.

3. En los cuatro triángulos los lados miden lo mismo, la mitad de cada uno de los lados del triángulo inicial y, por el teorema de Tales, los ángulos también son iguales, luego los cuatro triángulos son iguales. Además, son proporcionales al triángulo dado por la misma razón, los ángulos son iguales, siendo la razón de semejanza $\frac{1}{2}$.

4. a) Los triángulos ABC y DEF tienen los lados paralelos, por lo que los ángulos correspondientes son iguales. Por tanto, son triángulos semejantes.
 b) Los triángulos ABC y DBE tienen un ángulo común, \hat{B} , y otro igual, $\hat{E} = \hat{C} = 90^\circ$. Por tanto, son triángulos semejantes.
 c) Los triángulos rectángulos ABC y ACD tienen un ángulo común, \hat{A} , y otro igual, $\hat{D} = \hat{C} = 90^\circ$. Por tanto, son triángulos semejantes.

5. a) Isósceles, ya que dos ángulos \hat{D} , \hat{E} , son iguales.



b) Los triángulos ABC y DEC son semejantes, luego:

$$\frac{AC}{DC} = \frac{BC}{EC} = \frac{AB}{DE};$$

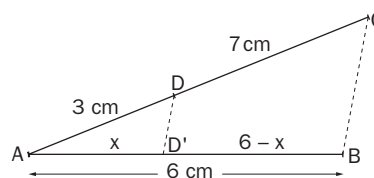
$$\frac{6 + \overline{DC}}{\overline{DC}} = \frac{6 + \overline{EC}}{\overline{EC}} = \frac{30}{20} \Rightarrow \overline{DC} = \overline{EC} = 12 \text{ cm}$$

$$6. \begin{cases} \frac{4}{x} = \frac{3}{y} \\ x^2 + y^2 = 10^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + \frac{9x^2}{16} = 100 \Rightarrow y = \frac{3x}{4} \Rightarrow \frac{25x^2}{16} = 100 \Rightarrow x = 8 \text{ cm}, y = 6 \text{ cm}$$

7. Para que sean semejantes debe verificarse que $\frac{AD}{DC} = \frac{DC}{ED}$. Llamando $x = \overline{AE}$, $h = \overline{ED}$, tendremos: $\frac{x+h}{x} = \frac{x}{h} \Rightarrow x^2 - hx - h^2 = 0$, que, resuelta, considerando x como la incógnita, se obtiene $x = h\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) \Rightarrow \frac{x}{h} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Es decir, los rectángulos son semejantes si los lados están en proporción áurea.

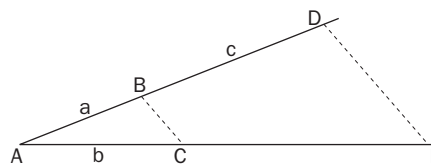
8. $\frac{x}{6-x} = \frac{3}{7} \Rightarrow x = 1,8 \text{ cm}$. Los segmentos medirán 1,8 cm y 4,2 cm.

Gráficamente, trazamos una semirrecta de origen A y sobre ella se llevan dos segmentos consecutivos de 3 y 7 cm. El extremo C se une con B y por D se traza una paralela a la recta CB . El segmento \overline{AB} queda dividido en dos segmentos proporcionales a 3 y 7.



9. $\frac{2}{2,5} = \frac{3}{x} \Rightarrow x = 3,75 \text{ cm}$

Para resolverlo gráficamente, trazamos dos semirrectas de origen A y sobre una de ellas se llevan consecutivamente los segmentos a y c , y sobre la otra el segmento b ; uniendo los extremos no comunes B y C . Se traza una paralela a \overline{BC} por D , extremo del segmento c . El segmento \overline{CE} es el segmento buscado.



10. $\frac{10}{16} = \frac{16}{x} \Rightarrow x = 25,6 \text{ mm}$

Gráficamente, trazamos dos semirrectas de origen A y sobre una de ellas se llevan consecutivamente los segmentos a y b , y sobre la otra el segmento b . El extremo B se une con C y se traza por D una paralela a \overline{BC} . El segmento \overline{CE} es el segmento buscado.