INTRO. VECTORES. NÚM. COMPLEJOS

El presente tema se dedicará al estudio de los conceptos de vectores y números complejos.

Se comenzará con un pequeño estudio de los vectores del plano y sus propiedades fundamentales, así como de las bases y coordenadas.

Después se hará un somero estudio de los números complejos, enlazándolo con la primera parte del tema y con la trigonometría vista en capítulos anteriores.

El estudio de los vectores es uno de tantos conocimientos de las matemáticas que provienen de la física. En esta ciencia se distingue entre magnitudes escalares y magnitudes vectoriales. Se llaman magnitudes escalares aquellas en que sólo influye su tamaño. Por el contrario, se consideran magnitudes vectoriales aquellas en las que, de alguna manera, influyen la dirección y el sentido en que se aplican.

Como ejemplos de magnitudes escalares se pueden citar la masa de un cuerpo, la temperatura, el volumen, etc.

Cuando se plantea un movimiento no basta con decir cuánto se ha desplazado el móvil, sino que es preciso decir también en qué dirección y sentido ha tenido lugar el movimiento. No son los mismos los efectos de un movimiento de 100 km a partir de un punto si se hace hacia el norte o si se hace en dirección suroeste, ya que se llegaría a distinto lugar.

Aunque el estudio matemático de los vectores tardó mucho en hacerse formalmente, en la actualidad tiene un gran interés, sobre todo a partir de los estudios de David Hilbert (1862-1943) y Stefan Banach (1892-1945), que hicieron uso de la teoría de espacios vectoriales, aplicándolos a las técnicas del análisis matemático.

VECTORES FIJOS

Un *vector fijo* del plano es un segmento cuyos extremos están dados en un cierto orden (se suele decir que es un segmento orientado). Se representa por $\overrightarrow{AB}$, siendo los extremos *A* y *B*

Se considera como caso singular el vector fijo definido por un segmento cuyos extremos coinciden. En este caso el vector fijo se reduce a un solo punto.

Los puntos en los que empieza y termina un vector se llaman *origen* y *extremo*, respectivamente.

<u>Módulo, dirección y sentido de un vector fijo</u>

- En un vector fijo se llama *módulo* del mismo a la longitud del segmento que lo define.

El módulo de un vector fijo $\overrightarrow{AB}$ se representa por $|\overrightarrow{AB}|$ y se leerá «módulo de $\overrightarrow{AB}$ ».

- Se dice que un vector fijo tiene la misma *dirección* que otro si los segmentos que los definen pertenecen a rectas paralelas.

- Dados dos vectores fijos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ del plano que tengan la misma dirección, se dice que tienen el mismo *sentido* si los segmentos $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{BC}$ (los segmentos que unen el origen de cada uno con el extremo del otro) tienen un punto en común. En otro caso se dice que los dos vectores tienen sentido contrario o sentido opuesto.

También se puede decir que dos vectores de la misma dirección tienen el mismo sentido si la recta definida por sus orígenes deja a los extremos en el mismo semiplano.

Estas dos definiciones son válidas en el caso en que los dos vectores se encuentren en distinta recta. Si los dos vectores se encontrasen en la misma recta, se buscaría un vector fijo en una recta paralela que tuviese el mismo sentido que ambos. Si lo hubiese, se diría que los dos vectores tienen el mismo sentido. En otro caso se diría que los dos vectores tienen sentido contrario.

Vectores equipolentes

Se dice que dos *vectores* son *equipolentes* si tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido.

Si $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son equipolentes, el cuadrilátero *ABCD* es un paralelogramo.

VECTORES LIBRES DEL PLANO

Un *vector libre* es el conjunto de todos los vectores fijos del plano que son equipolentes a uno dado.

Como todos los vectores fijos del plano consistentes en un solo punto son equipolentes, definen un único vector libre, que recibirá el nombre de vector cero, $\vec{0}$.

Representantes de un vector libre

A uno cualquiera de los vectores que constituyen un vector libre se le denomina *representante del vector libre*.

Para representar un vector libre se escribe uno cualquiera de sus representantes, o bien se escribe una letra con una flecha encima.

Resultado fundamental

Dados un punto *P* y un vector libre del plano, $\vec{a}$, existe un único representant de $\vec{a}$ con origen en *P*. Igualmente se puede encontrar un único representante de $\vec{a}$ con extremo en el punto *P*.

Demostración:

Para construir un representante de $\vec{a}$ con origen en *P* se traza una recta paralela al vector $\vec{a}$ que contenga al punto *P*.

En ella, desde *P*, y con el mismo sentido que $\vec{a}$, se mide una distancia igual al módulo de $\vec{a}$, $|\vec{a}|$, obteniéndose un punto *Q*. El vector fijo $\overrightarrow{PQ}$ es un representante de $\vec{a}$.

Para hallar un representante de $\vec{a}$ con extremo en P, se mide la distancia $|\vec{a}|$ en sentido contrario, obteniendo el punto *Q*'. El representante de $\vec{a}$ es, en este caso, el vector fijo $\overrightarrow{Q'P}$.

SUMA DE VECTORES

Dados dos vectores libres del plano $\vec{a}$ y $\vec{b}$, se define su *suma* como el vector libre construido así:

- Se elige un punto arbitrario del plano, *O*.
- Con origen en *O* se busca un representante del vector $\vec{a}$. Se llamará *P* a su extremo.
- Con origen en *P* se busca el vector $\overrightarrow{PQ}$, representante de $\vec{b}$.
- El vector suma $\vec{a} + \vec{b}$ viene representado por el vector fijo, $\overrightarrow{OQ}$ (se une el origen del representante de $\vec{a}$ con el extremo del representante de $\vec{b}$).

<u>Propiedades de la suma de vectores</u>

Conmutativa: Dados dos vectores del plano $\vec{a}$ y $\vec{b}$, $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

Asociativa: Dados tres vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ y $\vec{c}$ del plano, $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

Elemento neutro: Dado $\vec{a}$, un vector cualquiera del plano, $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$.

Es decir, el vector $\vec{0}$ es el elemento *neutro* de la operación suma de vectores libres del plano.

Demostración:

Recuérdese que $\vec{0}$ es el vector del plano formado por todos los vectores fijos cuyo origen coincide con el extremo.

Se elige un punto fijo del plano, *O*, y con origen en *O* se busca el vector $\overrightarrow{OP}$ representante de $\vec{a}$.

Los vectores $\overrightarrow{OO}$ y $\overrightarrow{PP}$ son representantes del vector $\vec{0}$.

Así se tiene:
$\vec{a} + \vec{0} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PP} = \overrightarrow{OP} = \vec{a}$ y $\vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$

Elemento simétrico: Dado un vector $\vec{a}$ del plano, existe otro vector $-\vec{a}$, tal que, $\vec{a}\vec{a}\vec{a}\vec{a} = \vec{0}$. El vector $-\vec{a}$ recibe el nombre de *simétrico* u *opuesto* de $\vec{a}$.

Demostración:

Bastará con demostrar una de las dos igualdades:

Sea $\overrightarrow{PQ}$ un representante de $\vec{a}$. Considérese el vector $-\vec{a} = \overrightarrow{QP}$.
$\vec{a}\vec{a}\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{PP} = \vec{0}$ y $\vec{a}\vec{a} = \vec{0}$

Como consecuencia de todas las propiedades vistas se dice que el conjunto de los vectores fijos del plano, junto con la suma de vectores, constituye un grupo conmutativo.
Observaciones:

1. Dado un vector $\vec{a}$, su opuesto -$\vec{a}$ tiene el mismo módulo, la misma dirección y sentido contrario al de $\vec{a}$, Basta con ver la contrucción de -$\vec{a}$.

2. Dados dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, existe un único vector $\vec{x}$ que verifica $\vec{a} = \vec{x} + \vec{b}$.

Si existe tal vector, sería: $\vec{a} = \vec{b} + \vec{x} \Rightarrow (-\vec{b}) + \vec{a} = (-\vec{b}) + (\vec{b} + \vec{x})$

Por la propiedad asociativa, $(-\vec{b}) + (\vec{b} + \vec{x}) = [\ (-\vec{b}) + \vec{b}\ ] + \vec{x} = \vec{0} + \vec{x} = \vec{x}$

Así, el único vector que puede verificar tal propiedad es el vector $\vec{x} = (-\vec{b}) + \vec{a}$.

Falta ver que efectivamente la verifica:
$\vec{b} + \vec{x} = \vec{b} + [\ (-\vec{b}) + \vec{a}\ ] = [\ \vec{b} + (-\vec{b})\ ] + \vec{a} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$, que es la igualdad buscada.

El vector (- $\vec{b}$) + $\vec{a}$ recibe el nombre de diferencia entre los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, y suele representarse por $\vec{a} - \vec{b}$.

PROD. DE VECTOR POR NÚM. REAL

Sean $\vec{a}$ un vector del plano y r un número real. Se define el producto $r \cdot \vec{a}$ de la siguiente forma:
a) Si $r = 0$ ó $\vec{a} = \vec{0}$, el producto es $r \cdot \vec{a} = \vec{0}$

b) El caso contrario, es decir, si $\vec{a} \neq \vec{0}$ y $r \neq 0$, se define:

- El módulo de $r \cdot \vec{a}$ es $|r \cdot \vec{a}| = |r|\,|\vec{a}|$, donde $|r|$ es el valor absoluto de r .

- La dirección de $r \cdot \vec{a}$ es la misma que la de $\vec{a}$.

- El sentido de $r \cdot \vec{a}$ es el mismo que el de $\vec{a}$ si r es positivo, y contrario si r es negativo.

Obsérvese que el producto de un vector por un número sólo puede ser nulo en el caso de serlo alguno de ellos. En dichos casos las propiedades son de comprobación inmediata, por lo que, en lo que sigue, se supondrá que tanto el número como el vector son no nulos.

<u>Primeras propiedades del producto de números por vectores</u>

1. Dado un vector $\vec{a}$ se verifica que $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$.

Demostración:

En efecto, $|1 \cdot \vec{a}| = |1|\,|\vec{a}| = |\vec{a}|$

Por definición $1 \cdot \vec{a}$ tiene la misma direción que $\vec{a}$.

Como 1 es positivo, el sentido de $1 \cdot \vec{a}$ es el de $\vec{a}$.

Por tener el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido, los vectores libres $\vec{a}$ y $1 \cdot \vec{a}$ coinciden.

2. Para cualquier vector $\vec{a}$, se verifica que $(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$

Demostración:

Para verlo conviene recordar que $-\vec{a}$ tiene el mismo módulo, la misma dirección y sentido contrario al de $\vec{a}$. Si se concluye que $(-1)\cdot\vec{a}$ cumple esas tres condiciones, se tendrá la propiedad dada.

$|(-1)\cdot\vec{a}| = |-1|\ |\vec{a}| = 1|\vec{a}| = |\vec{a}|$

La dirección de $(-1)\cdot\vec{a}$ es la de $\vec{a}$.

El sentido de $(-1)\cdot\vec{a}$ es opuesto al de $\vec{a}$, porque -1es negativo.

Así pues $(-1)\cdot\vec{a}$ tiene módulo, dirección y sentido iguales a los de $-\vec{a}$. Por tanto:
$(-1)\cdot\vec{a} = -\vec{a}$.

3. Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores no nulos. Entonces:

Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tienen la misma dirección, existe un número *r* tal que $\vec{a} = r \cdot \vec{b}$; y *r* es positivo si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tienen el mismo sentido, y negativo en caso contrario.

Además, de $\vec{a} = r \cdot \vec{b}$, se deduce que $|\vec{a}| = |r| \cdot |\vec{b}| \Rightarrow |r| = \dfrac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$

A partir de ahora, para diferenciar números de vectores, a los primeros se les llamará, a menudo, *escalares*.

<u>Otras propiedades del producto de escalares por vectores</u>
1. Dados dos números reales *r* y *s*, y un vector $\vec{a}$ se tiene:

$$(r \cdot s)\vec{a} = r\,(s\cdot\vec{a})$$

(Debido al extraordinario parecido que tiene esta propiedad con la propiedad asociativa del producto de números, a veces se la denomina propiedad asociativa.)

2. Propiedad distributiva del producto respecto de la suma de escalares

Dados dos números *r* y *s* y un vector $\vec{a}$, se cumple la igualdad:

$$(r + s)\vec{a} = r\,\vec{a} + s\vec{a}$$

Demostración:
Se hará únicamente en el caso r , $s > 0$. Para comprobarlo en los demás casos, bastará con hacer pequeñas modificaciones teniendo en cuenta los sentidos de los vectores.

Los vectores $r\,\vec{a}$ y $s\,\vec{a}$ tienen la misma dirección y el mismo sentido. Al sumarlos se suman los módulos y se mantienen la dirección y el sentido.

Así pues, $|r\vec{a}+s\vec{a}|=|r\vec{a}|+|s\vec{a}| = r|\vec{a}|+s|\vec{a}|$

Pero $|(r + s)\vec{a}| = (r + s)|\vec{a}| = r|\vec{a}| + s|\vec{a}|$
Luego ambos vectores tienen el mismo módulo.

La dirección y el sentido de ambos coinciden con los de $\vec{a}$.

Por tener iguales el módulo, la dirección y el sentido ambos vectores libres son iguales.

3. Propiedad distributiva del producto respecto de la suma de vectores

Dados un número real r y dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, se verifica $r\,(\vec{a} + \vec{b}) = r\,\vec{a} + r\,\vec{b}$.

Demostración:

● Para demostrarlo se elige un punto *P* del plano y a partir de él se llevan los vectores $\vec{a} = \overrightarrow{PH}$ y $r\,\vec{a} = \overrightarrow{PH'}$

● Se construye el vector $\vec{b}$ con origen en *H*, obteniéndose el punto *M*.

● Prolongando la recta *PM* y trazando por *H* ' una paralela a *HM*, se obtiene *M* ' como punto de intersección.

● Los dos triángulos *PHM* y *PH'M*' son semejantes por el teorema fundamental de semejanza de triángulos. Su razón de semejanza es:

$\dfrac{\overline{PH'}}{\overline{PH}} = r$ por ser $\overrightarrow{PH'} = r\vec{a}$ y $\overrightarrow{PH} = \vec{a}$.

Así pues, $\dfrac{\overline{H'M'}}{\overline{HM}} = r$, con lo que $\overline{H'M'} = r \cdot \overline{HM}$.

●Puesto que los vectores $\overrightarrow{HM}$ y $\overrightarrow{H'M'}$ tienen la misma dirección y sentido, se tiene que $\overrightarrow{H'M'} = r \cdot \overrightarrow{HM} = r \cdot \vec{b}$.

●De la misma forma $\overline{PM'} = r \cdot \overline{PM}$, de donde se da la igualdad vectorial $\overrightarrow{PM'} = r \cdot \overrightarrow{PM}$.

● Ya es fácil demostrar el resultado enunciado:

$$r \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = r \cdot (\overrightarrow{PH} + \overrightarrow{HM}) = r \cdot \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PM'}$$

$$r \cdot \vec{a} + r \cdot \vec{b} = \overrightarrow{PH'} + \overrightarrow{H'M'} = \overrightarrow{PM'}.$$

De ahí la igualdad.

Ejercicio de aplicación

- Dados un número real x y un vector $\vec{a}$, demostrar que $(-x)\vec{a} = x(-\vec{a}) = -(x\vec{a})$

Resolución:

Se comprobará que los dos primeros vectores son iguales a $-(x\vec{a})$ o, lo que es lo mismo, que sumados a $x\,\vec{a}$ el resultado es el vector $\vec{0}$.

$(-x)\vec{a} + x\vec{a} = \left[(-x) + x\right]\vec{a} = 0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$, luego $(-x)\vec{a} = -(x\vec{a})$

De la misma forma, $x(-\vec{a}) + x\vec{a} = x[(-\vec{a}) + \vec{a}] = x\cdot\vec{0}$, luego $x(-\vec{a}) = -(x\vec{a})$

COMBINACIONES LINEALES

Dada una familia de vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \ldots$ y un vector cualquiera $\vec{x}$, se dice que $\vec{x}$ es *combinación lineal* de la familia, si existen números reales $x_1, x_2, x_3, \ldots$ tales que

$$\vec{x} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + x_3\vec{u}_3 + \ldots$$

Primera propiedad

Los vectores que son combinación lineal de un solo vector $\vec{u}$ son el vector $\vec{0}$ y todos los vectores que son paralelos a $\vec{u}$.

Demostración:

Si $\vec{x}$ es combinación lineal de $\vec{u}$, es de la forma $\vec{x} = r\cdot\vec{u}$. Entonces:

a) Si $r = 0$, $\vec{x} = 0\cdot\vec{u} = \vec{0}$

b) Si $r \neq 0$, $\vec{x} = r\cdot\vec{u}$, luego $\vec{x}$ es paralelo a $\vec{u}$ por tener ambos la misma dirección.

Segunda propiedad

Dados dos vectores del plano $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ que tengan distinta dirección, el único vector que es combinación lineal de cada uno de ellos es el vector $\vec{0}$.

Demostración:

Si hubiese un vector no nulo que fuese combinación lineal de cada uno de ellos, también habría de ser paralelo a cada uno de ellos, con lo que $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ han de ser paralelos entre sí, lo cual va contra la hipótesis.

Teorema

Sean $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ dos vectores del plano con distinta dirección. Entonces cualquier vector $\vec{x}$ del plano se puede poner de manera única como combinación lineal de $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$.

Demostración:

- Considérese P un punto cualquiera del plano y trácense, con origen en P, representantes de los vectores $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ y $\vec{x}$.

- Llamando A al extremo de $\vec{x}$, se trazan por él paralelas a los vectores $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$.

Prolongando las rectas que contienen a $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$, se obtienen los puntos B y C.

De la figura se deduce inmediatamente que $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}$.

Pero $\overrightarrow{PB}$ es paralelo a $\vec{u}_1$, por lo que se tiene que $\overrightarrow{PB} = x_1\,\vec{u}_1$, para un cierto número x_1

Análogamente $\overrightarrow{PC} = x_2\vec{u}_2$, para cierto escalar x_2.

Por tanto $\vec{x} = \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2$.

- Falta ver la unicidad:

Si $\vec{x} = y_1\vec{u}_1 + y_2\vec{u}_2$, $x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 = y_1\vec{u}_1 + y_2\vec{u}_2 \Rightarrow (x_1 - y_1)\vec{u}_1 = (x_2 - y_2)\vec{u}_2$

con lo que se tiene un vector que es combinación lineal de cada uno de ellos. Por la segunda propiedad vista anteriormente, se concluye que dicho vector ha de ser $\vec{0}$.

Así, $(x_1 - y_1)\vec{u}_1 = (x_2 - y_2)\vec{u}_2 = \vec{0}$. Para ello han de ser 0 los coeficientes, es decir:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 - y_1 = 0 \Rightarrow x_1 = y_1 \\ y_2 - x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = y_2 \end{array}\right\} \text{Luego los números dados son únicos.}$$

BASES. COORDENADAS

Se llama *base* del plano a cualquier pareja de vectores $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ del mismo, que tengan distinta dirección.

Dados una base del plano $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ y un vector $\vec{x}$, se llama *coordenadas* de $\vec{x}$ *respecto de la base* a los números reales x_1 y x_2 que verifican que $\vec{x} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2$.

Por el teorema demostrado anteriormente, las coordenadas de un vector respecto de una base existen y son únicas.

Ejercicios de aplicación

- Sea $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ una base del plano. Decir si las siguientes parejas de vectores son bases:

$a)\ \{2\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2,\ 3\vec{u}_1 + \vec{u}_2\}$ $\qquad$ $b)\ \{3\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2,\ 6\vec{u}_1 - 4\vec{u}_2\}$

Resolución:

Para ver si dos vectores constituyen una base hay que comprobar si tienen o no la misma dirección. Pero ya se vio que dos vectores tienen la misma dirección cuando uno de ellos es combinación lineal del otro.

a) Hay que ver si existe un número *t* tal que

$$t(2\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2) = 3\vec{u}_1 + \vec{u}_2$$
$$2t\vec{u}_1 + 3t\vec{u}_2 = 3\vec{u}_1 + \vec{u}_2$$

Por la unicidad de las coordenadas de un vector respecto de una base se ha de verificar que:

$2t = 3 \Rightarrow t = 3/2$
$3t = 1 \Rightarrow t = 1/3$

Pero no hay ningún número que verifique simultáneamente ambas condiciones.

Así pues, los dos vectores tienen distinta dirección y, por tanto, constituyen una base.

b) Se repite el proceso:

$$t(3\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2) = 6\vec{u}_1 - 4\vec{u}_2$$

$$3t\vec{u}_1 - 2t\vec{u}_2 = 6\vec{u}_1 - 4\vec{u}_2$$

Igualando coordenadas:

$3t = 6 \Rightarrow t = 2$
$-2t = -4 \Rightarrow t = 2$

es un número válido para la igualdad. Los vectores dados tienen la misma dirección y, por tanto, no constituyen una base.

, Sea $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ una base del plano vectorial y sean x_1, x_2, y_1 e y_2 números reales.

Demostrar que el conjunto $\{x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2,\ y_1\vec{u}_1 + y_2\vec{u}_2\}$ es una base si $\dfrac{x_1}{y_1} \neq \dfrac{x_2}{y_2}$.

Resolución:

ı Para que dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ formen base, no han de ser paralelos, es decir, no ha de existir un t que verifique $t\vec{a} = \vec{b}$.

• Supóngase que $t(x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2) = y_1\vec{u}_1 + y_2\vec{u}_2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow t\,x_1\vec{u}_1 + tx_2\vec{u}_2 = y_1\vec{u}_1 + y_2\vec{u}_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t\,x_1 = y_1 \Rightarrow t = \frac{x_1}{y_1}$$

$$\Rightarrow t\,x_2 = y_2 \Rightarrow t = \frac{x_2}{y_2}$$

• Para que los vectores no sean paralelos se ha de verificar

$\dfrac{x_1}{y_1} \neq \dfrac{x_2}{y_2}$, condición impuesta.

f Sea $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ una base del plano. Comprobar que $\{2\vec{u}_1 + \vec{u}_2, \vec{u}_1 - \vec{u}_2\}$ es una base del plano y hallar las coordenadas del vector $5\vec{u}_1 + 4\vec{u}_2$ respecto de dicha base.

Resolución:

• $t(2\vec{u}_1 + \vec{u}_2) = \vec{u}_1 - \vec{u}_2$

$2t\vec{u}_1 + t\vec{u}_2 = \vec{u}_1 - \vec{u}_2$

Igualando las coordenadas: $2t = 1$ y $t = -1$.

Puesto que ningún número verifica ambas condiciones, los vectores dados constituyen una base, por no ser paralelos.

● Se trata ahora de calcular las coordenadas del vector $5\vec{u}_1 + 4\vec{u}_2$ respecto de dicha base.
Las coordenadas son los dos números x_1 y x_2 tales que:

$$5\vec{u}_1 + 4\vec{u}_2 = x_1(2\vec{u}_1 + \vec{u}_2) + x_2(\vec{u}_1 - \vec{u}_2)$$

Operando en dicha igualdad:

$$5\vec{u}_1 + 4\vec{u}_2 = 2x_1\vec{u}_1 + x_1\vec{u}_2 + x_2\vec{u}_1 - x_2\vec{u}_2 = (2x_1 + x_2)\vec{u}_1 + (x_1 - x_2)\vec{u}_2.$$

Por unicidad de las coordenadas de un vector respecto de la base $\{u_1, u_2\}$

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 5 \\ x_1 - x_2 &= 4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} &x_2 = 5 - 2x_1 \\ &x_1 = 4 + 5 - 2x_1 \Rightarrow x_1 = 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x_2 &= -1 \\ x_1 &= 3 \end{aligned}$$

PRODUCTO ESCALAR

Dados *dos vectores* no nulos del plano, se llama *producto escalar* al número obtenido como producto de sus módulos por el coseno del ángulo que forman:

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\cos\alpha$$

Si alguno de los dos vectores fuese el vector $\vec{0}$, su producto escalar sería igual a 0.

<u>Propiedades del producto escalar</u>

● *Primera propiedad del producto escalar*
El producto escalar de dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es igual al producto del módulo de $\vec{a}$ por la proyección de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$ (este producto será positivo si $\vec{a}$ y la proyección de $\vec{b}$ sobre él tienen el mismo signo, y negativo en caso contrario).

Demostración:

La proyección de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$ es un segmento de medida *x*.

Por la resolución de triángulos rectángulos se sabe que $\cos\alpha = \dfrac{x}{|\vec{b}|}$

Sustituyendo en la definición de producto escalar:

$\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\cos\alpha = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cdot \dfrac{x}{|\vec{b}|} = |\vec{a}| \cdot x$, que es la fórmula que se quería demostrar.

● *Propiedad **conmutativa** del producto escalar de vectores*

Dados dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, $\vec{a} \bullet \vec{b} = \vec{b} \bullet \vec{a}$

Demostración:

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\ \cos\alpha = |\vec{b}|\,|\vec{a}|\ \cos\alpha = \vec{b} \bullet \vec{a}$$

● *Propiedad* ***distributiva*** *respecto de la suma*

Dados tres vectores cualesquiera $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ del plano, $\vec{a} \bullet (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \bullet \vec{b} + \vec{a} \bullet \vec{c}$

Demostración:
Para demostrarlo se utiliza la primera propiedad del producto escalar.

En la figura, la proyección de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$ es el segmento *x*, la proyección de $\vec{c}$ sobre $\vec{a}$, es el segmento *y*, y la proyección de $\vec{b} + \vec{c}$ sobre $\vec{a}$ es el segmento $x + y$.
Así pues:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a} \bullet (\vec{b} + \vec{c}) = |\vec{a}|\ (x + y) \\ \vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}|x \\ \vec{a} \bullet \vec{c} = |\vec{a}|y \end{array}\right\} \vec{a} \bullet \vec{b} + \vec{a} \bullet \vec{c} = |\vec{a}|x + |\vec{a}|y = |\vec{a}|(x + y) = \vec{a} \bullet (\vec{b} + \vec{c})$$

● *Propiedad de* ***linealidad***

Si se multiplica uno de los factores de un producto escalar por un número real, el producto escalar queda multiplicado por dicho número.

$$(x\vec{a}) \bullet \vec{b} = x(\vec{a} \bullet \vec{b})$$

Demostración:
Se excluirán los casos en que alguno de los datos sea nulo. Se distinguen dos casos:

● Si $x > 0$, $|x\vec{a}| = x|\vec{a}|$; y $x\vec{a}$ tiene el mismo sentido que $\vec{a}$, con lo que formará con $\vec{b}$ el mismo ángulo que forma con $\vec{a}$.

Así, $(x\vec{a}) \bullet \vec{b} = |x\vec{a}|\ |\vec{b}|\ \cos\alpha =$

$$= x|\vec{a}|\ |\vec{b}|\ \cos\alpha = x(\vec{a} \bullet \vec{b}).$$

● Si $x < 0$, $|x\vec{a}| = (-x)|\vec{a}|$; y por tener sentido opuesto al de $\vec{a}$, forma con $\vec{b}$ un ángulo suplementario al que forma con $\vec{a}$.

Pero $\cos(180º - \alpha) = -\cos\alpha$, luego:

$$(x\vec{a}) \bullet \vec{b} = |x\vec{a}|\ |\vec{b}|\ \cos(180º - \alpha) = (-x)|\vec{a}|\ |\vec{b}|(-\cos\alpha) = x|\vec{a}|\ |\vec{b}|\ \cos\alpha = x\ (\vec{a} \bullet \vec{b})$$

● *Propiedad de* ***ortogonalidad*** *(perpendicularidad)*

Dados dos vectores no nulos $\vec{a}$ y $\vec{b}$, si $\vec{a} \bullet \vec{b} = 0$, entonces $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son perpendiculares, y si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son perpendiculares, entonces $\vec{a} \bullet \vec{b} = 0$

Demostración:

a) Como $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son no nulos, se tiene que $|\vec{a}|\,|\vec{b}| \neq 0$, con lo que:

$\vec{a} \bullet \vec{b} = 0 \Rightarrow |\vec{a}|\,|\vec{b}|\ \cos\alpha = 0 \Rightarrow\ \cos\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 90^\circ$, es decir, $\vec{a} \perp \vec{b}$

b) Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son perpendiculares, forman entre sí un ángulo de 90°, entonces

$\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cdot \cos 90^\circ = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cdot 0 = 0$

- ***Positividad*** *del producto escalar*

Dado un vector cualquiera $\vec{a}$, $\vec{a} \bullet \vec{a} \geq 0$.

Demostración:

Dado un vector cualquiera, se tiene que $\vec{a} \bullet \vec{a} = |\vec{a}|^2$ (pues *cos* 0º = 1) y, por tanto,
se tiene que $\vec{a} \bullet \vec{a} \geq 0$. El único caso en que $\vec{a} \bullet \vec{a} = 0$ es cuando $\vec{a} = \vec{0}$

Cálculo del producto escalar

Puesto que $\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\ \cos\alpha$, parece sencillo calcular $\vec{a} \bullet \vec{b}$, pero en la práctica puede resultar complicado conocer el módulo de los vectores y el ángulo que forman.

En general, resulta más sencillo calcular el producto escalar de dos vectores conociendo sus coordenadas respecto de una base y los productos escalares de los vectores que forman dicha base.

Supóngase que se tienen dos vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ que respecto a una base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ del plano tienen coordenadas (x_1, x_2) e (y_1, y_2), es decir:

$$\vec{x} = x_1\,\vec{u}_1 + x_2\,\vec{u}_2$$
$$\vec{y} = y_1\,\vec{u}_1 + y_2\,\vec{u}_2$$

Además,

$$\vec{u}_1 \bullet \vec{u}_1 = a$$
$$\vec{u}_1 \bullet \vec{u}_2 = \vec{u}_2 \bullet \vec{u}_1 = b$$
$$\vec{u}_2 \bullet \vec{u}_2 = c$$

El producto escalar de $\vec{x}$ e $\vec{y}$ será entonces (se aplican las propiedades distributivas respecto de la suma y de linealidad)

$$\vec{x} \bullet \vec{y} = (x_1\,\vec{u}_1 + x_2\,\vec{u}_2) \bullet (y_1\,\vec{u}_1 + y_2\,\vec{u}_2) =$$

$$= (x_1\,\vec{u}_1) \bullet (y_1\,\vec{u}_1) + (x_1\,\vec{u}_1) \bullet (y_2\,\vec{u}_2) + (x_2\,\vec{u}_2) \bullet (y_1\,\vec{u}_1) + (x_2\,\vec{u}_2) \bullet (y_2\,\vec{u}_2) =$$

$$= x_1y_1\,(\vec{u}_1 \bullet \vec{u}_1) + x_1y_2\,(\vec{u}_1 \bullet \vec{u}_2) + x_2y_1\,(\vec{u}_2 \bullet \vec{u}_1) + x_2y_2\,(\vec{u}_2 \bullet \vec{u}_2) =$$

$$= x_1y_1a + x_1y_2b + x_2y_1b + x_2y_2c =$$

$$= x_1y_1a + (x_1y_2 + x_2y_1)b + x_2y_2c$$

$$\vec{x} \bullet \vec{y} = x_1y_1a + (x_1y_2 + x_2y_2)b + x_2y_2c$$

Ejercicio: cálculo del producto escalar de dos vectores

- Hallar el producto escalar de los vectores $\vec{a} = 2\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2$ y $\vec{b} = 4\vec{u}_1 - \vec{u}_2$,

donde $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ es una base del plano en la que $|\vec{u}_1| = 2$, $|\vec{u}_2| = 1$ y ambos vectores, $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$, forman un ángulo de 60º.

Resolución:

- $\vec{a} \bullet \vec{b} = (2\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2) \bullet (4\vec{u}_1 - \vec{u}_2) = 8(\vec{u}_1 \bullet \vec{u}_1) + 10(\vec{u}_1 \bullet \vec{u}_2) - 3(\vec{u}_2 \bullet \vec{u}_2)$

- $\vec{u}_1 \bullet \vec{u}_1 = |\vec{u}_1|^2 = 4;\ \vec{u}_2 \bullet \vec{u}_2 = |\vec{u}_2|^2 = 1$

$\vec{u}_1 \bullet \vec{u}_2 = \vec{u}_2 \bullet \vec{u}_1 = |\vec{u}_1|\,|\vec{u}_2|\ \cos 60º = 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 1$

- $\vec{a} \bullet \vec{b} = 8 \cdot 4 + 10 \cdot 1 - 3 = 32 + 10 - 3 = 39$

<u>Cálculo del módulo de un vector</u>

Para hallar el módulo de un vector se puede aplicar la última propiedad vista para el producto escalar.

Como $\vec{a} \bullet \vec{a} = |\vec{a}|^2$, el módulo de $\vec{a}$ es:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a \bullet a}$$

<u>Cálculo del ángulo formado por dos vectores</u>

Como $\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\ \cos \alpha$, despejando se obtiene:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{\sqrt{\vec{a} \bullet \vec{a}}\ \sqrt{\vec{b} \bullet \vec{b}}}$$

Ejercicio: cálculo del ángulo que forman dos vectores

- Dada la base del plano $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ donde $|\vec{u}_1| = 2$, $|\vec{u}_2| = 1$ y los vectores $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$

son perpendiculares, calcular el ángulo que forman los vectores $\vec{a} = 3\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2$ y $\vec{b} = 2\vec{u}_1 + 5\vec{u}_2$.

Resolución:

$\vec{u}_1 \bullet \vec{u}_1 = |\vec{u}_1|^2 = 2^2 = 4$

$\vec{u}_1 \bullet \vec{u}_2 = \vec{u}_2 \bullet \vec{u}_1 = 0$, ya que ambos vectores son perpendiculares.

$\vec{u}_2 \bullet \vec{u}_2 = |\vec{u}_2|^2 = 1^2 = 1$

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = (3\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2) \bullet (2\vec{u}_1 + 5\vec{u}_2) = 6\vec{u}_1 \bullet \vec{u}_1 + 15\vec{u}_1 \bullet \vec{u}_2 - 4\vec{u}_2 \bullet \vec{u}_1 - 10\vec{u}_2 \bullet \vec{u}_2 =$$
$$= 6 \cdot 4 + 15 \cdot 0 - 4 \cdot 0 - 10 \cdot 1 = 14$$

De la misma forma:

$\vec{a} \bullet \vec{a} = (3\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2) \bullet (3\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2) = 9 \cdot 4 - 6 \cdot 0 - 6 \cdot 0 + 4 \cdot 1 = 40$

$\vec{b} \bullet \vec{b} = (2\vec{u}_1 + 5\vec{u}_2) \bullet (2\vec{u}_1 + 5\vec{u}_2) = 4 \cdot 4 + 10 \cdot 0 + 10 \cdot 0 + 25 \cdot 1 = 41$

Sustituyendo en la fórmula obtenida para el ángulo de dos vectores se tiene:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{\sqrt{\vec{a} \bullet \vec{a}}\ \sqrt{\vec{b} \bullet \vec{b}}} = \frac{14}{\sqrt{40}\ \sqrt{41}} = 0{,}34 \Rightarrow \alpha = 70^\circ\ 7'\ 23''$$

BASES ORTONORMALES

Se dice que una *base* $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ es *ortonormal* si los dos vectores que la forman tienen módulo 1 y son perpendiculares entre sí.

Cuando se trabaja con este tipo de bases es sencillo calcular los productos escalares, ya que

$\vec{u}_1 \bullet \vec{u}_1 = |\vec{u}_1|^2 = 1$, porque $\vec{u}_1$ tiene módulo 1. $\vec{u}_2 \bullet \vec{u}_2 = 1$, por el mismo argumento.

$\vec{u}_1 \bullet \vec{u}_2 = 0$, por ser perpendiculares ambos vectores.

Aplicando estos resultados a las fórmulas ya obtenidas, se tiene que dados los vectores $\vec{x} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2$, $y = y_1\vec{u}_1 + y_2\vec{u}_2$,

$$\vec{x} \bullet \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

$$\vec{x} \bullet \vec{x} = x_1^2 + x_2^2$$

$$|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x} \bullet \vec{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

y siendo α el ángulo que forman,

$$\cos \alpha = \frac{x_1 \; y_1 + x_2 \; y_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \; \sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$$

Ejercicios con bases ortonormales

En todos los ejercicios siguientes se considera que $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ es una base ortonormal del plano.

- Hallar la proyección del vector $\vec{a}$ sobre el vector $\vec{b}$, siendo $\vec{a} = 2\vec{u}_1 + \vec{u}_2$ y $\vec{b} = 3\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2$.

Resolución:
En primer lugar se calcula el módulo de dicha proyección. Para ello es conveniente recordar que el producto escalar de dos vectores es igual al producto del módulo de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.

$$|\vec{p}| = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{2 \cdot 3 + 1 \cdot 2}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{8}{\sqrt{13}}$$

Para determinar la proyección se observa que, por ser ésta paralela al vector $\vec{b}$ será de la forma $\vec{p} = t \cdot \vec{b}$, donde t es un número real.

Como el producto escalar es positivo, esto quiere decir que la proyección $\vec{p}$ tiene el mismo sentido que $\vec{b}$, con lo que t ha de ser positivo.

Entonces, $|\vec{p}| = |t \cdot \vec{b}| = t\,|\vec{b}|$, con lo que $t = \dfrac{|\vec{p}|}{|\vec{b}|}$.

Sustituyendo:

$$t = \frac{8}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{13}} = \frac{8}{13}$$

Así, $\vec{p} = t \cdot \vec{p} = \dfrac{8}{13}(3\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2) = \dfrac{24}{13}\vec{u}_1 + \dfrac{16}{13}\vec{u}_2$

, Hallar el área de un paralelogramo cuyos lados no paralelos son los vectores $\vec{a} = 4\vec{u}_1 - 3\vec{u}_2$ y $\vec{b} = 2\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2$.

Resolución:
El área de un paralelogramo es igual al producto de dos de sus lados por el seno del ángulo que forman:

$S = |\vec{b}| \cdot h = |\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \cdot sen\ \alpha$, puesto que $sen\ \alpha = \dfrac{h}{|\vec{a}|}$.

$$\cos\,\alpha = \frac{4\cdot 2 - 3\cdot 3}{\sqrt{4^2+3^2}\cdot\sqrt{2^2+3^2}} = \frac{-1}{\sqrt{325}}$$

Para calcular el seno de este ángulo se aplica la fórmula fundamental de la trigonometría: $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Así, $\operatorname{sen}^2\alpha = 1 - \left(\frac{-1}{\sqrt{325}}\right)^2 = 1 - \frac{1}{325} = \frac{324}{325} \Rightarrow \operatorname{sen}\,\alpha = \frac{18}{\sqrt{325}}$.

Y así el área es:

$$S = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\operatorname{sen}\,\alpha = \sqrt{25}\,\sqrt{13}\cdot\frac{18}{\sqrt{325}} = 18$$

ƒ Aplicando la definición de producto escalar, demostrar el teorema de Pitágoras.

Resolución:

Sea un triángulo rectángulo. Llamando $\vec{b}$ y $\vec{c}$ a los vectores que se pueden construir en los catetos y $\vec{a}$ al vector de la hipotenusa, tal como se indica en la figura, se tiene:

$\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$, de donde:

$$|\vec{a}|^2 = \vec{a}\bullet\vec{a} = (\vec{b}+\vec{c})\bullet(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{b}\bullet\vec{b} + \vec{b}\bullet\vec{c} + \vec{c}\bullet\vec{b} + \vec{c}\bullet\vec{c}$$

Pero, por ser un triángulo rectángulo, resulta que $\vec{b}\bullet\vec{c} = \vec{c}\bullet\vec{b} = 0$.

Así:

$|\vec{a}|^2 = \vec{b}\bullet\vec{b} + \vec{c}\bullet\vec{c} = |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2$, que es la expresión del teorema de Pitágoras.

„ Demostrar que las dos diagonales de un rombo son perpendiculares.

Resolución:

Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos lados consecutivos del rombo. Sus diagonales son $\vec{a}+\vec{b}$ y $\vec{a}-\vec{b}$.

Para ver que son perpendiculares bastará con comprobar que su producto escalar es 0:

$$(\vec{a}+\vec{b})\bullet(\vec{a}-\vec{b}) = \vec{a}\bullet\vec{a} - \vec{a}\bullet\vec{b} + \vec{b}\bullet\vec{a} - \vec{b}\bullet\vec{b}$$

Por la propiedad conmutativa del producto escalar, $\vec{a}\bullet\vec{b} = \vec{b}\bullet\vec{a}$.

Así pues, $(\vec{a}+\vec{b})\bullet(\vec{a}-\vec{b}) = \vec{a}\bullet\vec{a} - \vec{b}\bullet\vec{b} = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2$

Hasta ahora no se ha utilizado el hecho de que se está trabajando con un rombo.

Esto significa que los dos lados $|\vec{a}|$ y $|\vec{b}|$ son iguales.

Entonces $(\vec{a}+\vec{b})\bullet(\vec{a}-\vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 0$, con lo que las dos diagonales son perpendiculares.

NÚMEROS COMPL. INTRO. (I)

Como ya se sabe, existen algunas ecuaciones de segundo grado que no tienen ninguna solución real. Tal es el caso de la ecuación $x^2 + 1 = 0$.

Si bien esto no era un problema excesivamente grave en la época en que se observó, un ingenioso método ideado por Jerónimo Cardano (1501-1576) para la resolución de las ecuaciones de tercer grado precisaba resolver cualquier tipo de ecuaciones de segundo grado, para su aplicación.

Esto dio lugar a que se admitieran también las raíces cuadradas de los números negativos llamándolas «números imaginarios». Casi un siglo tuvo que pasar para que se hiciese un estudio completo de los mismos, llegándose a lo que hoy se llama el cuerpo de los números complejos.

El teorema más importante que existe sobre los números complejos es el «Teorema Fundamental del Álgebra», demostrado por Carl Friederich Gauss (1777-1855) que dice que cualquier polinomio con coeficientes complejos tiene una raíz compleja.

Se llama *unidad imaginaria* a un ente abstracto *i* , al que se le atribuye la propiedad de que su cuadrado es -1: $i^2 = -1$.

Añadiendo este elemento al cuerpo de los números reales, se tiene una solución para la ecuación $x^2 + 1 = 0$, pero ocurre que ya no se dispone de un procedimiento para calcular la suma y el producto de dos elementos de la estructura así obtenida.

Para que se puedan hacer multiplicaciones, es preciso que dado un número real *b* y la unidad imaginaria *i* exista el producto *bi* .

Además para que estos números puedan sumarse con los números reales es preciso también que, dado un número real *a* exista el elemento $a + bi$.

Esto da lugar a un conjunto de expresiones a las que se denominará números complejos.

Un problema que vale la pena plantearse es si podrá ocurrir que dos expresiones distintas den el mismo resultado. La respuesta es negativa.

Si $a + bi = c + di$ se tendría que $a - c = (d - b)i$. Elevando al cuadrado:

$(a-c)^2 = (d-b)^2\ i^2 = -(d-b)^2$.

Como el primer miembro es mayor o igual que 0 (por ser un cuadrado) y el segundo es menor o igual que 0 (por ser un cuadrado cambiado de signo) se tiene que ambos han de ser nulos. Por tanto:

$$a - c = 0 \Rightarrow a = c$$

$$d - b = 0 \Rightarrow b = d$$

Las expresiones son así las mismas.

Nótese que hasta ahora se ha hecho uso de las propiedades propias de un cuerpo para ciertas expresiones que no se ha demostrado que lo constituyan. Teniendo en cuenta que tampoco se ha dado una definición correcta de lo que son los complejos, esto podría servir para justificar el porqué de la definición.

Tampoco se ha comprobado que con las expresiones de la forma $a + bi$ se puedan hacer todas las sumas y todos los productos posibles.

Para que se verifiquen las propiedades de cuerpo es interesante observar que ha de ser:

$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$, que es otra expresión del mismo tipo.

Para el producto sería $(a+bi) + (c+di) = ac + bci + adi + bdi^2 = (ac-bd) + (ad+bc)i$, que de nuevo es una expresión de la forma dada.

Parece pues razonable dar la siguiente definición:

Se llama *número complejo* a cualquier expresión de la forma $a + bi$, siendo a y b números reales.

Así, por ejemplo, $2 - 3i$, $\frac{5}{2} + \sqrt{7}\, i$, $5i$ son números complejos.

<u>Igualdad de números complejos</u>
Dos *números complejos* $a + bi$ y $c + di$ son *iguales* si $a = c$ y $b = d$.

<u>Parte real y parte imaginaria de un número complejo</u>
Dado el complejo $z = a + bi$, el número a recibe el nombre de *parte real* de z y b se llama *parte imaginaria de z*. Se representan por $Re(z)$ e $Im(z)$ respectivamente.

Si un número complejo tiene una de sus partes (real o imaginaria) igual a cero, ésta no suele escribirse. Así, se escribirá a en lugar de $a + 0i$ y también bi en lugar de escribir $0 + bi$.

Se puede considerar que los números reales son los números complejos cuya parte imaginaria es 0. Los números complejos cuya parte real es 0 suelen recibir el nombre de *imaginarios puros*.

<u>Suma y producto de números complejos</u>
Dados dos *números complejos* $a + bi$ y $c + di$ se definen su *suma* y su *producto* como sigue:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

El producto puede hacerse operando con i como si fuese un número real y teniendo en cuenta que $i^2 = -1$.

$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = ac + i(ad + bc) + bd(-1) =$$

$$= ac - bd + i(ad + bc)$$

Propiedades de la suma de números complejos
La suma de números complejos tiene las siguientes propiedades:

- **Conmutativa**

Dados dos números complejos $a + bi$ y $c + di$ se tiene la igualdad:

$$(a + bi) + (c + di) = (c + di) + (a + bi)$$

Ejemplo:

$$(2 - 3i) + (-3 + i) = (2 - 3) + i(-3 + 1) = -1 - 2i$$
$$(-3 + i) + (2 - 3i) = (-3 + 2) + i(1 - 3) = -1 - 2i$$

- **Asociativa**

Dados tres complejos $a + bi$, $c + di$ y $e + fi$, se cumple:

$$[(a + bi) + (c + di)] + (e + fi) = (a + bi) + [(c + di) + (e + fi)]$$

Ejemplo:

$$[(5 + 2i) + (3 - 4i)] + (-9 + 8i) = (8 - 2i) + (-9 + 8i) = -1 + 6i$$
$$(5 + 2i) + [(3 - 4i) + (-9 + 8i)] = (5 + 2i) + (-6 + 4i) = -1 + 6i$$

- **Elemento neutro**

El elemento neutro es $0 + 0i$, puesto que

$$(a + bi) + (0 + 0i) = (a + 0) + i(b + 0) = a + bi$$

El número $0 + 0i$ se escribe simplificadamente 0 y se le llama «cero».

- **Elemento simétrico**

El elemento simétrico de un número complejo cualquiera $a + bi$ es $(-a - bi)$:

$$(a + bi) + (-a - bi) = 0 + 0i = 0$$

Ejemplo:

El simétrico de $2 - 3i$ es $-2 + 3i$ pues $(2 - 3i) + (-2 + 3i) = 0$

Propiedades del producto de complejos

- **Conmutativa**

Dados dos complejos $a + bi$ y $c + di$, se cumple que:

$$(a + bi)(c + di) = (c + di)(a + bi)$$

Ejemplo:

$$(7 - i)(5 + 2i) = 35 + 14i - 5i - 2i^2 = 35 + 9i - 2(-1) = 37 + 9i$$

$$(5+2i)(7-i) = 35-5i+14i-2i^2 = 35+9i-2(-1) = 37+9i$$

- **Asociativa**

Dados los complejos *a* + *bi, c* + *di* y *e* + *fi* se cumple que:

$$[(a+bi)(c+di)](e+fi) = (a+bi)[(c+di)(e+fi)]$$

Ejemplo:

$$[(2-3i)(5+i)](4-7i) = (10+2i-15i-3i^2)(4-7i) = (13-13i)(4-7i) =$$
$$= 52-91i-52i+91i^2 = -39-143i$$
$$(2-3i)[(5+i)(4-7i)] = (2-3i)(20-35i+4i-7i^2) = (2-3i)(27-31i) =$$
$$= 54-62i-81i+93i^2 = -39-143i$$

- **Elemento neutro**

El elemento neutro del producto es $1 + 0 \cdot i = 1$, puesto que para cualquier complejo *a* + *bi* , $(a + bi)(1 + 0 \cdot i) = (a + bi) \cdot 1 = a + bi$.

El elemento neutro es el uno.

- **Distributiva del producto con respecto a la suma**

Dados tres números complejos *a* + *bi* , *c* + *di* y *e* + *fi* , se cumple:

$$(a+bi)[(c+di)+(e+fi)] = (a+bi)(c+di) + (a+bi)(e+fi)$$

Ejemplo:

$$(1-2i)[3i+(2-7i)] = (1-2i)(2-4i) = 2-4i-4i+8i^2 = -6-8i$$

$$(1-2i)3i + (1-2i)(2-7i) = (3i-6i^2) + (2-7i-4i+14i^2) =$$

$$= (3i+6) + (-12-11i) = -6-8i$$

El conjunto de los números complejos, por contar con todas las propiedades anteriores para la suma y para el producto, se dice que es un anillo conmutativo.

El conjunto de los números complejos se simboliza por **C**, o también (**C**, +, ·).

- **Elemento simétrico respecto del producto**

Dado un complejo cualquiera *a* + *bi* , distinto de 0 + 0*i* , existe otro complejo que, multiplicado por él, da el elemento neutro del producto, es decir, 1 + 0*i* .

Demostración:

Se intentará calcular el inverso de *a* + *bi* , *x* + *yi* .

Ha de verificarse que $(a + bi)(x + yi) = 1 + 0i$

$(a + bi)(x + yi) = (ax - by) + (ay + bx)i$. Por tanto ha de ser:

$ax - by = 1$, multiplicando por a se tiene: $a^2x - aby = a$

$bx + ay = 0$, multiplicando por b se tiene: $\underline{b^2x + aby = 0}$

$$\text{Sumando } (a^2 + b^2)x = a \Rightarrow x = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

Despejando y en la segunda ecuación:

$$ay = -bx \Rightarrow y = -\frac{b}{a}x = -\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{a^2 + b^2} = \frac{-b}{a^2 + b^2}$$

El *inverso* de un *número complejo* $z = a + bi$, se suele denotar por $\frac{1}{z}$ ó z^{-1}.

Por tanto, si $z = a + bi$,

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$$

El conjunto de los números complejos es un cuerpo conmutativo con la suma y el producto definidos.

<u>División de números complejos</u>

La división es la operación inversa de la multiplicación. Esto es, dividir un número complejo entre otro es el resultado de multiplicar el primero por el inverso del segundo.

Ejercicios de aplicación

① Dividir $\frac{z}{w}$, siendo $z = 3 + 5i$ y $w = 1 - i$.

Resolución:

$$\frac{1}{w} = \frac{1}{1^2 + (-1)^2} - \frac{-1}{1^2 + (-1)^2}i = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$\frac{z}{w} = z\cdot\frac{1}{w} = (3 + 5i)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i + \frac{5}{2}i + \frac{5}{2}i^2 =$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{5}{2} + \frac{8i}{2} = -1 + 4i$$

② Efectuar la operación $\frac{(5 - 3i)(1 + i)}{(1 - i) + 3i}$.

Resolución:

- $\dfrac{(5-3i)(1+i)}{(1-i)+3i} = \dfrac{5+5i-3i-3i^2}{1+2i} = \dfrac{5+2i+3}{1+2i} = \dfrac{8+2i}{1+2i}$

- $\dfrac{1}{1+2i} = \dfrac{1}{1^2+2^2} - \dfrac{2}{1^2+2^2}i = \dfrac{1}{5} - \dfrac{2}{5}i$

- $\dfrac{8+2i}{1+2i} = (8+2i)\left(\dfrac{1}{5} - \dfrac{2}{5}i\right) = \dfrac{8}{5} - \dfrac{16}{5}i + \dfrac{2}{5}i - \dfrac{4}{5}i^2 =$

$$= \frac{8}{5} - \frac{14}{5}i + \frac{4}{5} = \frac{12}{5} - \frac{14}{5}i$$

Raíces cuadradas de un número complejo

Además del método general que se verá más adelante para calcular raíces cualesquiera de un número complejo argumental, existe un procedimiento para hallar específicamente las raíces cuadradas de un complejo en su forma binómica.

El procedimiento es idéntico en todos los casos, por lo que bastará con aplicarlo una vez.

Se va a intentar hallar las raíces cuadradas del complejo $7 + 24i$.

Sea $a + bi$ una de dichas raíces cuadradas. Entonces, $7 + 24i = (a + bi)^2 =$
$= a^2 + 2abi + (bi)^2 = (a^2 - b^2) + 2abi$

Para que estos complejos sean iguales, han de tener iguales su parte real y su parte imaginaria. Por tanto:

$7 = a^2 - b^2$

$24 = 2ab \Rightarrow ab = 12 \Rightarrow b = \dfrac{12}{a}$

Sustituyendo en la primera ecuación: $a^2 - \left(\dfrac{12}{a}\right)^2 = 7$

$a^2 - \dfrac{144}{a^2} = 7 \Rightarrow a^4 - 144 = 7a^2 \Rightarrow a^4 - 7a^2 - 144 = 0$, que es una ecuación bicuadrada.

Haciendo el cambio $t = a^2$ resulta la ecuación $t^2 - 7t - 144 = 0$.

Esta ecuación tiene dos soluciones, una positiva y una negativa. En este caso sólo nos interesa la positiva, ya que t es el cuadrado de un número real.

$$t = \frac{7+\sqrt{49+576}}{2} = \frac{7+25}{2} = 16$$

Así, $a^2 = t = 16$, lo que da lugar a las soluciones $a = \pm 4$

Se tienen pues dos soluciones $a = 4 \Rightarrow b = \dfrac{12}{4} = 3$

$$a = -4 \Rightarrow b = \frac{12}{-4} = -3$$

Las raíces cuadradas de $7 + 24i$ son $4 + 3i$ y $-4 - 3i$: $\sqrt{7 + 24i} = \pm\,(4 + 3i)$

Ejercicio: cálculo de la raíz cuadrada de un número complejo

- Resolver la ecuación $z^2 + (2 + i)z - (13 - 13i) = 0$

Resolución:

● Siendo un cuerpo el conjunto de los números complejos, se puede aplicar la fórmula conocida para la resolución de la ecuación de segundo grado:

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

donde $a = 1$, $b = 2 + i$ y $c = -(13 - 13i)$.

● El discriminante es:

$$b^2 - 4ac = (2 + i)^2 + 4\,(13 - 13i) = 4 + i^2 + 4i + 52 - 52i = 55 - 48i$$

● Hay que calcular su raíz cuadrada. Sea $x + yi$ dicha raíz:

$$55 - 48i = (x + yi)^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi$$

Igualando parte real e imaginaria:

$$55 = x^2 - y^2$$

$$48 = 2xy \Rightarrow x = \frac{24}{y}$$

$$55 = \left(\frac{24}{y}\right)^2 - y^2 = \frac{576}{y^2} - y^2 \Rightarrow 55y^2 = 576 - y^4 \Rightarrow y^4 + 55y^2 - 576 = 0$$

Haciendo el cambio $t = y^2$, $t^2 + 55t - 576 = 0$

Aplicando la fórmula de la ecuación de segundo grado:

$$t = \frac{-55 \pm \sqrt{55^2 + 4 \cdot 576}}{2} = \frac{-55 \pm \sqrt{3\,025 + 2\,304}}{2} =$$

$$= \frac{-55 \pm 73}{2} = \begin{matrix} \to 9 \\ \to -64 \end{matrix}$$

Como *t* es el cuadrado de un número real y, por tanto positivo, se desprecia la solución $t = -64$

Así $t = 9 \Rightarrow y = \pm 3 \Rightarrow x = \frac{24}{y} = \pm 8$

Se tiene entonces que las raíces cuadradas de $55 - 48i$ son $8 + 3i$ y $-8 - 3i$.

Sustituyendo en la fórmula de la ecuación de segundo grado:

$$z = \frac{-(2+i) \pm (8+3i)}{2} = \begin{array}{l} \rightarrow \ 3+1 \\ \rightarrow -5-2i \end{array}$$

Representación gráfica de un número complejo
Puesto que cualquier número complejo se puede representar de forma única mediante dos números reales (su parte real y su parte imaginaria), se puede identificar cada complejo $a + bi$ con el punto del plano (a,b) y viceversa.

Es más, cualquier punto del plano (a,b) define un vector de origen (0,0) y extremo (a,b).

De esta forma, cualquier número complejo puede representarse como un vector en el plano cuyo origen es el de coordenadas (0,0) y cuyo extremo es el *par ordenado asociado al complejo* (a,b).

Así, en el plano, el vector asociado al número complejo $2 - 3i$ tiene por coordenadas (2,-3).

Conjugado de un número complejo
Se llama *conjugado de un número complejo* al número complejo que se obtiene por simetría del dado respecto del eje de abscisas.

Representando el número complejo $a + bi$ y haciendo la correspondiente simetría, se tiene que su conjugado es $a - bi$.

Dado un número complejo, su conjugado puede representarse poniendo encima del mismo una línea horizontal. Así se escribirá:

$$\overline{a + bi} = a - bi$$

Propiedades de los conjugados

- *Primera propiedad*

El conjugado del conjugado de un complejo *z* es el propio *z.*

Demostración:

En efecto si $z = a + bi$ se tiene que $\overline{z} = a - bi$, de donde, $\overline{\overline{z}} = a + bi = z$

- *Segunda propiedad*

Dados dos números complejos cualesquiera z y z' , el conjugado de su suma es igual a la suma de sus conjugados.

Esto se expresa escribiendo que $\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z}'$

Demostración:
Tomando $z = a + bi$ y $z' = c + di$, se tiene:

$\bar{z} = a + bi$ y $\bar{z}' = c - di$, con lo que $\bar{z} + \bar{z}' = (a + bi) + (c - di) = (a + c) + (-b - d)i$

Por otra parte:

$$z + z' = (a + c) + (b + d)i \Rightarrow \overline{z + z'} = (a + c) - (b + d)i,$$

y es fácil ver que esta expresión coincide con la anterior.

- *Tercera propiedad*

El conjugado del producto de dos números complejos es igual al producto de los conjugados de dichos números:

$$\overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \bar{z}'$$

Demostración:

Si $z = a + bi$ y $z = c + di$ se tiene que $z \cdot z = (ac - bd) + (ad + bc)i$, cuyo conjugado es $\overline{z \cdot z'}$ $= (ac - bd) - (ad + bc)i$.
Calculando por otro lado el producto de los conjugados, resulta que
$\bar{z} \cdot \bar{z}' = (a - bi)(c - di) = (ac - bd) + (-ad - bc)i$.
El resultado es igual al anterior.

- *Cuarta propiedad*

Los complejos que coinciden con sus conjugados son los números reales.

Demostración:
Sea un complejo $a + bi$ que coincida con su conjugado. Esto equivale a que

$a + bi = a - bi$

Pero esto sólo ocurre si $b = 0$, es decir si $a + bi$ es un número real.

- *Quinta propiedad*

La suma y el producto de un complejo y su conjugado son, ambos, números reales.

Demostración:

$$(a + bi) + (a - bi) = 2a$$
$$(a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2$$

NÚMEROS COMPL. INTRO. (II)

-

División de números complejos

Como consecuencia de este resultado, se tiene un procedimiento más sencillo que el visto para efectuar una división. Basta con multiplicar numerador y denominador por el conjugado del denominador.

Por ejemplo:

$$\frac{2+3i}{4+5i}=\frac{(2+3i)\,(4-5i)}{(4+5i)\,(4-5i)}=\frac{8-10i+12i+15}{16+25}=\frac{23+2i}{41}=\frac{23}{41}+\frac{2}{41}i$$

Ejercicio: división de números complejos

---

① Determinar k de forma que el cociente $\frac{(-2+ki)}{k-i}$ sea:

a) Real.
b) Imaginario puro.
c) Tenga la parte real igual a la imaginaria.

Resolución:

$$\frac{-2+ki}{k-i}=\frac{(-2+ki)\,(k+i)}{(k-i)\,(k+i)}=\frac{-2k-2i+k^2i+ki^2}{k^2+1}=$$

$$=\frac{-3k}{k^2+1}+\frac{k^2-2}{k^2+1}i$$

a) Para que este cociente sea un número real es preciso que su parte imaginaria sea 0:

$$\frac{k^2-2}{k^2+1}=0\Rightarrow k^2-2=0\Rightarrow k^2=2\Rightarrow k=\pm\sqrt{2}$$

b) Para que sea imaginario puro ha de tener parte real nula:

$$\frac{-3k}{k^2+1}=0\Rightarrow -3k=0\Rightarrow k=0$$

c) $\frac{-3k}{k^2+1}=\frac{k^2-2}{k^2+1}\Rightarrow -3k=k^2-2\Rightarrow k^2+3k-2=0.$

Resolviendo dicha ecuación se obtienen dos valores para *k*:

$$k=\frac{-3\pm\sqrt{9+8}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$$

Forma trigonométrica y forma módulo-argumental de un complejo

Al representar un número complejo como un vector en la forma ya descrita, éste viene definido de manera única por dos valores: su *módulo* y el ángulo α formado por el eje positivo de abscisas con el vector. Este ángulo recibe el nombre de *argumento* del número complejo.

Dado un complejo $z = a + bi$ en su forma binómica y llamando $|z|$ a su módulo y α a su argumento, se tienen las siguientes relaciones:

$$\cos \alpha = \frac{a}{|z|} \text{ y } \operatorname{sen} \alpha = \frac{b}{|z|}$$

Despejando *a* y *b* en estas igualdades, $a = |z| \cos \alpha$ y $b = |z| \operatorname{sen} \alpha$

De ahí se tiene que:

$$a + bi = |z|\cos \alpha + |z|\operatorname{sen} \alpha i = |z|(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$$

Cualquier número complejo *z* puede representarse así como una expresión de la forma $|z|(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$.
Esta manera de escribir un número complejo recibe el nombre de *forma trigonométrica*.

En muchos casos se escribe simplemente el módulo, y el argumento como subíndice. Así se podría escribir $|z|_\alpha$, en lugar de escribir la forma trigonométrica completa $|z|(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$.

Esta manera de expresar un número complejo se llama *forma módulo argumental* o *polar*.

Nótese que si al argumento de un número complejo es incrementado en 360º, al no variar el seno ni el coseno de dicho ángulo, el número complejo definido no varía.

<u>Cálculo de módulo y argumento de un complejo</u>

Para calcular el argumento de un número complejo $z = a + bi$, basta con tener en cuenta que:

$$a = |z| \cdot \cos \alpha$$
$$b = |z| \cdot \operatorname{sen} \alpha$$

Dividiendo estas dos igualdades,

$$\frac{b}{a} = \frac{|z| \cdot \operatorname{sen} \alpha}{|z| \cdot \cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$$

Así, el argumento de un complejo es un ángulo cuya tangente vale $\frac{b}{a}$.
Entre 0º y 360º hay, en general, dos ángulos cuya tangente toma ese valor. Para decidirse entre ellos es preciso fijarse en qué cuadrante se encuentra el complejo en cuestión.

Para calcular el módulo se suman los cuadrados de las dos igualdades obtenidas:

$$a^2 + b^2 = |z| \cos \alpha + |z|^2 \operatorname{sen} \alpha =$$
$$= |z|^2 (\cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha) = |z|^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Ejercicio: formas de escribir un número complejo

- Escribir en forma módulo-argumental los complejos 3 + 2*i* , 1 - *i* , -2 - 5*i.*

Resolución:

$a)\ |3+2i| = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13}$

$tg\ \alpha = \frac{2}{3} = 0{,}66$. Haciendo uso de la calculadora, $\alpha = 33^\circ\ 41'\ 24''$

Teniendo en cuenta que dos ángulos que difieren en 180º tienen la misma tangente, podría aceptarse α = 213º 41' 24" .

Pero el complejo dado se encuentra en el primer cuadrante.

Así, $3+2i = (\sqrt{13})_{33^\circ\ 41'\ 24''}$

$b)\ |1-i| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$

$tg\ \alpha = -\frac{1}{1} = -1$

Los ángulos que tienen tangente -1 son los ángulos de 135º y 315º. Como el complejo dado pertenece al cuarto cuadrante, el argumento es 315º.

Así $1-i = (\sqrt{2})_{315^\circ}$

$c)\ |-2-5i| = \sqrt{(-2)^2+(-5)^2} = \sqrt{29}$

$tg\ \alpha = \frac{-5}{-2} = 2{,}5$

Los ángulos cuya tangente es 2,5 son 68º 11 54 y 248º 11 54. El complejo dado pertenece al tercer cuadrante, por lo que el argumento es el segundo valor.

Por tanto $-2-5i = (\sqrt{29})_{248^\circ\ 11'\ 54''}$.

, Representar en forma binómica los complejos 3_{50°, 2_{180°, y 1_{220°

Resolución:

3_{50° = 3(*cos* 50º + *i*·*sen* 50º) = 3(0,643 + 0,766 *i*) = 1,929 + 2,298*i*

2_{180° = 2(*cos* 180º + *i*·*sen* 180º) = 2 (-1 + 0*i*) = - 2

1_{220° = 1(*cos* 220º + *i*·*sen* 220º) = - 0,766 - 0,643 *i*

<u>Producto de complejos en forma módulo-argumental</u>

Aunque ya se dispone de un método para calcular el producto de dos números complejos cualesquiera, cuando ambos números vienen dados en su forma módulo-argumenal existe un procedimiento mucho más sencillo. Este método consiste en multiplicar sus módulos y sumar sus argumentos.

Para ver que esto es correcto, basta con efectuar la multiplicación:

$$R_\alpha \cdot R'_{\alpha'} = R\,(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha) \cdot R'\,(\cos\alpha' + i\,\mathrm{sen}\,\alpha') =$$
$$= RR'\,\{(\cos\alpha \cdot \cos\alpha' - \mathrm{sen}\,\alpha \cdot \mathrm{sen}\,\alpha') + i\,(\mathrm{sen}\,\alpha \cdot \cos\alpha' + \cos\alpha \cdot \mathrm{sen}\,\alpha')\}$$

Pero las expresiones que se encuentran entre paréntesis son precisamente las razones trigonométricas del ángulo $\alpha + \alpha'$. Así se tiene que

$$R_\alpha \cdot R'_{\alpha'} = RR'\,\{\cos(\alpha + \alpha') + i\,\mathrm{sen}\,(\alpha + \alpha')\} = (RR')_{\alpha + \alpha'}$$

Ejercicios de aplicación

- Demostrar que para dividir dos números complejos se dividen sus módulos y se restan sus argumentos.

Resolución:

Supóngase que se quieren dividir los complejos $R_\alpha \cdot R'_{\alpha'}$. Llmando R'' al módulo del cociente y α'' a su argumento,

$$\frac{R_\alpha}{R'_{\alpha'}} = R''_{\alpha''} \Rightarrow R_\alpha = R'_{\alpha'} \cdot R''_{\alpha''} = (R' \cdot R'')_{\alpha' + \alpha''}.$$

Se tiene, pues, que $R = R' \cdot R'' \Rightarrow R'' = \dfrac{R}{R'}$ y que $\alpha = \alpha' + \alpha'' \Rightarrow \alpha'' = \alpha - \alpha'$

, Comprobar la fórmula vista para el producto multiplicando por dos métodos distintos los complejos $3i$ y $2 - 2i$.

Resolución:

- En primer lugar se multiplican directamente los dos números:

$$3i\,(2 - 2i) = 6i - 6i^2 = 6 + 6i$$

- Ahora se calcula el módulo y el argumento de cada uno de los factores:

$$|3i| = \sqrt{0^2 + 3^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$tg\,\alpha = \frac{3}{0}, \text{ con lo que } \alpha = 90° \text{ ó } \alpha = 270°.$$

Por ser positiva la ordenada,
$\alpha = 90° \Rightarrow 3i = 3_{90°}$.

$$|2 - 2i| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$$

$$tg\,\alpha' = \frac{-2}{2} = -1, \text{ con lo que } \alpha' = 135° \text{ ó } \alpha' = 315°.$$

Como el complejo dado está en el cuarto cuadrante, será

$\alpha' = 315^o \Rightarrow 2 - 2i = \sqrt{8}_{315^o}$.

Multiplicando en forma módulo-argumental:

$$3i \cdot (2 - i) = 3_{90^o}\,(\sqrt{8})_{315^o} = (3\sqrt{8})_{405^o} = (3\sqrt{8})_{45^o} \quad (405^o = 45^o + 360^o)$$

Transformando dicho número a su forma binómica:

$$(3\sqrt{8})_{45^o} = 3\sqrt{8}\,(\cos 45^o + i \operatorname{sen} 45^o) = 3\sqrt{8}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) =$$

$$= \frac{3\sqrt{16}}{2} + \frac{3\sqrt{16}}{2}i = 6 + 6i$$

f Demostrar que el producto de un complejo por su conjugado es igual al cuadrado del módulo.

Resolución:

Se van a dar dos demostraciones:

a) Si $z = a + bi$ se tiene $\bar{z} = a - bi$, de donde

$$z \cdot \bar{z} = (a - bi)(a + bi) = a^2 + b^2 = |z|^2.$$

b) Si se considera el complejo dado en la forma módulo-argumental, cuyo módulo es R y cuyo argumento es α, en la figura adjunta se ve que su conjugado tiene también módulo *R*, pero que su argumento es $360^o - \alpha$.

Multiplicando:

$$R_\alpha \cdot R_{360^o - \alpha'} = (R.R)_{360^o} = R^2 (\cos 360^o + i \operatorname{sen} 360^o) = R^2 (1 + 0i) = R^2$$

Fórmula de Moivre

El módulo de una potencia cuya base es un número complejo, es otro complejo cuyo módulo se obtiene elevando el módulo al exponente correspondiente y cuyo argumento se obtiene multiplicando el argumento por el exponente. Es decir,

$(R_\alpha)^n = R^n_{n\alpha}$

Demostración:

$$(R_\alpha)^n = R_\alpha \cdot R_\alpha \cdots R_\alpha = (R \cdot R \ldots R)_{\alpha + \alpha \ldots + \alpha} = (R^n)_{n\alpha}$$

Esta igualdad recibe el nombre de *fórmula de Moivre*, en honor del matemático francés Abraham de Moivre (1667-1754).

Ejercicio: aplicación de la fórmula de Moivre

- Aplicar la fórmula de Moivre para hallar la expresión de *sen* 4*x* y de *cos* 4*x* en función de las razones trigonométricas de *x*.

Resolución:

Se considera el complejo 1_x. Calculando su cuarta potencia:

$$(1_x)^4 = 1_{4x} = \cos 4x + i\ \text{sen}\ 4x$$

Pero $1_x = \cos x + i\ \text{sen}\ x$, con lo que $(1_x)^4 = (\cos x + i\ \text{sen}\ x)^4$.

Aplicando el binomio de Newton a esta expresión:

$$(\cos x + i\ \text{sen}\ x)^4 = \cos^4 x + 4i \cos^3 x \cdot \text{sen}\ x + 6 \cos^2 x (i\ \text{sen}\ x)^2 + \\ + 4 \cos x \cdot (i\ \text{sen}\ x)^3 + (i\ \text{sen}\ x)^4$$

Pero $i^2 = -1$, $i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$ e $i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1$

Así:

$$(\cos x + i\ \text{sen}\ x)^4 = \cos^4 x + 4i \cos^3 x \cdot \text{sen}\ x - 6 \cos^2 x \cdot \text{sen}^2 x - 4 \cos x \cdot \text{sen}^3 x\ i + \text{sen}^4 x$$

La parte real de este número es:

$$\cos 4x = \cos^4 x - 6\cos^2 x \cdot \text{sen}^2 x + \text{sen}^4 x$$

Y la parte imaginaria es:

$$\text{sen}\ 4x = 4\cos^3 x \cdot \text{sen}\ x - 4\cos x \cdot \text{sen}^3 x$$

<u>Raíces de un número complejo</u>

Para hallar las raíces de un número complejo se aplica la fórmula de Moivre, teniendo en cuenta que para que dos complejos coincidan han de tener el mismo módulo y la diferencia de sus argumentos ha de ser un múltiplo entero de 360º.

Sea R_α un número complejo y considérese otro complejo $R'_{\alpha'}$, tal que

$$R_\alpha = (R'_{\alpha'})^n = ((R')^n)_{n\alpha'}$$

Esto equivale a que $(R')^n = R$, o lo que es lo mismo, que $R' = \sqrt[n]{R}$, y que $n\alpha' = \alpha + k \cdot 360^\circ \Leftrightarrow \alpha' = \frac{\alpha}{n} + k \cdot \frac{360^\circ}{n}$, donde k es un entero arbitrario. Es decir,

$$\sqrt[n]{R_\alpha} = \left(\sqrt[n]{R}\right)_{\frac{\alpha + k \cdot 360^\circ}{n}}$$

Aunque esto parece aportar una infinidad de soluciones, nótese que si a k se le suma un múltiplo de n, al dividir el nuevo argumento, éste aparece incrementado en un número entero de circunferencias. Por tanto, basta con dar a *k* los valores 1, 2, 3, ..., *n* - 1, lo que da un total de *n* - 1 raíces, que junto a *k* = 0 da un total de *n* raíces.

Ejercicio: cálculo de raíces de un número complejo

- Hallar las raíces cúbicas de 8.

Resolución:

El método descrito permite calcular raíces únicamente en la forma módulo-argumental. Se debe escribir el número 8 en dicha forma:

$$|8| = \sqrt{8^2 + 0^2} = \sqrt{64} = 8$$

$$tg\ \alpha = \frac{0}{8} = 0, \text{ con lo que } \alpha = 0° \text{ ó } \alpha = 180°.$$

Como la parte real de 1 es positiva el valor adecuado es α = 0º.

Calculando los valores precisos:

$$\sqrt[3]{8} = 2, \frac{0°}{3} = 0° \text{ y } \frac{360°}{3} = 120°$$

Así, las raíces cúbicas son las que tienen módulo igual a 2 y argumento 0º + 120º*k*, donde *k* puede tomar los valores 0, 1 y 2.

Se tienen pues las tres raíces:

$$2_{0º} = 2(cos\ 0º + i\ sen\ 0º) = 2(1 + 0i) = 2$$

$$2_{120°} = 2(cos\ 120° + i\ sen\ 120°) = 2\left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -1 + \sqrt{3}\ i$$

$$2_{240°} = 2(cos\ 240° + i\ sen\ 240°) = 2\left(\frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -1 - \sqrt{3}\ i$$

, Hallar las raíces cuartas de 2 + 2*i* .

Resolución:

En primer lugar se calcula el módulo y el argumento de 2 + 2*i* :

$$|2 + 2i| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$$

$$tg\ \alpha = \frac{2}{2} = 1, \text{ con lo que } \alpha = 45°, \text{ ya que ha de hallarse en el primer cuadrante.}$$

El módulo de todas las raíces cuartas será $\sqrt[4]{\sqrt{8}} = \sqrt[8]{8}$

Para hallar los argumentos hay que calcular $\frac{45^\circ}{4} = 11^\circ\, 15'$ y $\frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$.

Dando a *k* los valores 0, 1, 2 y 3 se obtienen las cuatro raíces cuartas de 2 + 2*i*, que son:

$$\sqrt[8]{8}\ (cos\ 11^\circ 15' + i\, sen\ 11^\circ 15') = 1{,}297\ (0{,}981 + 0{,}195i) = 1{,}272 + 0{,}253i$$

$$\sqrt[8]{8}\ (cos\ 101^\circ 15' + i\, sen\ 101^\circ 15') = 1{,}297\ (-0{,}195 + 0{,}981i) = -0{,}253 + 1{,}272i$$

$$\sqrt[8]{8}\ (cos\ 191^\circ 15' + i\, sen\ 191^\circ 15') = 1{,}297\ (-0{,}981 - 0{,}195i) = -1{,}272 - 0{,}253i$$

$$\sqrt[8]{8}\ (cos\ 281^\circ 15' + i\, sen\ 281^\circ 15') = 1{,}297\ (0{,}195 - 0{,}981i) = 0{,}253 - 1{,}272i$$