

VECTORES

Vector fijo : es un segmento cuyos extremos se dan en cierto orden . Se simbolizan de la siguiente forma : \vec{AB} .

Características de un vector fijo :

1º Módulo : es la longitud del segmento \overline{AB} . Se simboliza por $|\vec{AB}|$ /

2º Dirección : es la determinada por la recta que pasa por A y B , se indica mediante el ángulo que forma con una semirecta conocida , normalmente el eje $Ox+$.

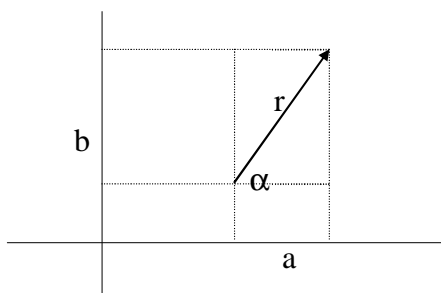
3º Sentido : es el del origen A al extremo B , es decir no es lo mismo \vec{AB} que \vec{BA} , ya que tienen mismo módulo y dirección , pero distinto sentido .

Componentes de un vector :

Si $A(x_1, x_2)$ y $B(y_1, y_2)$ entonces las componentes del vector \vec{AB} serán los números reales $y_1 - x_1$ e $y_2 - x_2$, y se escribe $\vec{AB} = (y_1 - x_1, y_2 - x_2)$.

No se debe confundir las "coordenadas de un punto" , con las "componentes de un vector" .

Calculo de las componentes de un vector :



De la figura se deduce que :

$$a = r \cos \alpha$$

$$b = r \operatorname{sen} \alpha$$

Dividiendo :

$$\operatorname{tg} \alpha = b/a$$

Por Pitágoras :

$$r^2 = a^2 + b^2$$

Ejemplo : Si $A(3, 1)$ y $B(-2, 4)$ calcular : (Hacer un dibujo para aclararse)

a) Componentes de $\vec{AB} = (-5, 3)$

b) Módulo de $\vec{AB} = \sqrt{(-5)^2 + 3^2} = \sqrt{34}$

c) Dirección : $\operatorname{tg} \alpha = 3/-5 \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg} 3/-5 = -31^\circ$ ó 149° ya que $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(180 + \alpha)$

Es decir la dirección es la de la recta que forma -31° ó 149° con el eje $Ox+$

d) Sentido : puesto que $(-5, 3)$ pertenece al segundo cuadrante elegimos 149° .

Ejemplo : Si un vector tiene 4 cm de módulo y forma un ángulo de 30° con el eje $Ox+$ calcular sus componentes :

$$a = 4 \cdot \cos 30^\circ = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

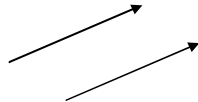
$$b = 4 \cdot \operatorname{sen} 30^\circ = 4 \cdot 1/2 = 2$$

Nota :con los datos del problema no se puede calcular las coordenadas del origen y extremo .

Ejercicio : El origen de un vector fijo es el punto $A(-1, 2)$, su módulo es de 3 cm y el ángulo que forma con el eje $Ox+$ es $5\pi/3$. Calcular las componentes del vector y las coordenadas del extremo B .

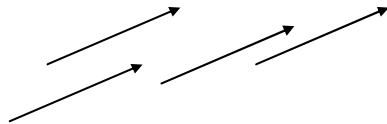
Vectores equipolentes :

Dos vectores fijos se dicen equipolentes si tienen el mismo módulo , dirección y sentido , o dicho de otra forma , dos vectores son equipolentes cuando tienen las mismas componentes .



Vector libre :

Se llama vector libre a cada vector fijo junto con todos sus equipolentes .



Así pues la frase : " el vector libre $(3, 4)$ " significa lo mismo que "el conjunto de vectores fijos de componentes $(3, 4)$ "

Un "representante" de un vector libre es uno cualquiera de los vectores fijos que lo forman .

Un vector libre representado por el vector fijo \vec{AB} se simboliza por $\{\vec{AB}\}$ o por una letra minúscula o en negrita : \vec{a} ó **a** . Siguiendo esta notación , el módulo de un vector libre se suele representar por $|\{\vec{AB}\}|$, $|\vec{a}|$ ó **a** .

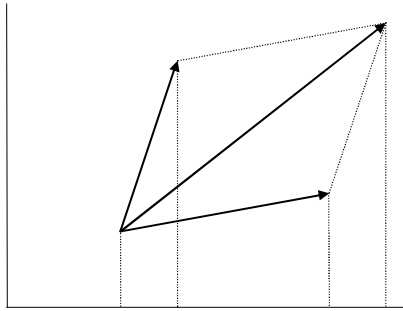
Ejercicio : Calcular el módulo del vector libre $\vec{a}=(2, 1)$. Si \vec{AB} es un representante de \vec{a} , calcular el ángulo que \vec{AB} forma con el eje $Ox+$.

Ejercicio : Averiguar si los vectores libres $(3, 4)$ y $(-6, -8)$ tienen el mismo módulo dirección y sentido .

Suma de vectores libres :

1º Gráficamente : para sumar los vectores libres \vec{a} , \vec{b} se procede de la siguiente forma : partiendo de un punto A cualquiera del plano se traza un representante \vec{AB} del vector \vec{a} , y con origen en B , se traza un representante \vec{BC} del vector libre \vec{b} . El vector libre \vec{c} cuyo representante \vec{AC} va del origen del primero al extremo del segundo , es el vector suma . Esta forma de definir el vector suma se llama regla del paralelogramo .

2º Analíticamente : si $\vec{a} = (x_1, x_2)$ y $\vec{b} = (y_1, y_2)$ se llama suma $\vec{a} + \vec{b}$ al vector libre de componentes $\vec{c} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$



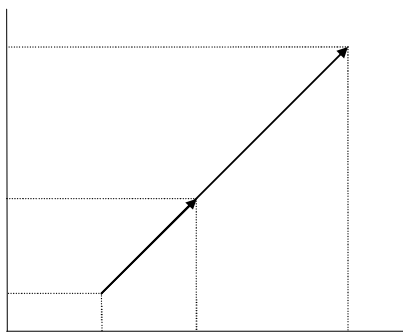
Cuestión : Si un vector libre \vec{a} tiene módulo 3 y otro \vec{b} módulo 4 , que puedes decir del módulo de $\vec{a} + \vec{b}$.

Solución : pues que el módulo está comprendido entre 1 y 7 .

Producto de un número real por un vector libre

1º Gráficamente : Si multiplicamos un vector por un número real lo que obtenemos es otro vector de la misma dirección , y del mismo sentido (en el caso de que sea positivo) . El módulo se obtendrá de multiplicar el valor absoluto del número real , por el módulo del vector .

2º Analíticamente : si $\vec{a} = (x_1, x_2)$ se llama producto del número real k por el vector \vec{a} , al vector $b = k \cdot \vec{a} = (kx_1, kx_2)$



Aplicaciones :

1º Calcular las coordenadas de los puntos que dividen un segmento \overline{AB} en dos o tres partes iguales .

Ejercicio : Calcular las coordenadas del punto medio entre A(1 , 2) y B(3 , 8) .

2º Calcular el simétrico de un punto respecto de otro .

Ejercicio : Calcular el simétrico del punto (6 , -2) respecto del punto (-8 , 4)

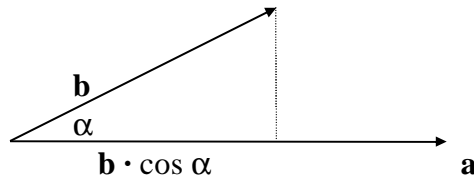
Producto escalar de dos vectores libres

El producto escalar de dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} es un número que resulta de multiplicar sus módulos por el coseno del ángulo menor que forman , es decir :

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \alpha$$

Interpretación geométrica :

El producto escalar de dos vectores es igual al módulo de uno de ellos por la proyección del otro sobre él .



$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot \text{Proy}_a \mathbf{b} \text{ (proyección de b sobre a)}$$

Consecuencias :

- si $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ entonces $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{a}| \cdot \cos 0 = |\mathbf{a}|^2 \Rightarrow |\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$ Importante
- si los vectores son paralelos y con el mismo sentido : $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos 0 = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|$
- si los vectores son paralelos y pero con distinto sentido : $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos 180 = -|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|$
- si los vectores son perpendiculares se dice que son **vectores ortogonales** , si los vectores son de módulo unidad se les llama **vectores unitarios o normales** , y si se cumplen las dos cosas a la vez se les llama **vectores ortonormales** :

$$\text{perpendiculares} \Rightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos 90 = 0$$

También se puede ver al revés , es decir , cuando el producto escalar de dos vectores es cero , entonces , o los vectores son nulos , o son perpendiculares .

- Se puede calcular a partir de un vector \mathbf{a} , otro vector \mathbf{u} que tenga la misma dirección , el mismo sentido , y sea unitario : $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$ se puede ver facilmente que tiene la misma dirección y sentido que \mathbf{a} y es unitario porque

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \sqrt{\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} \cdot \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}} = \sqrt{\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2}} = \sqrt{\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}} = 1$$

Ejercicio : Calcular el producto escalar de los vectores $\mathbf{a} = (3 , 1)$ y $\mathbf{b} = (2 , 2)$

Ejercicio : Calcular un vector unitario que tenga la dirección y sentido de $(4 , 5)$

Combinación lineal de dos o más vectores

Se llama combinación lineal de los vectores \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} a cada uno de los vectores de la forma $\mathbf{u} = a_1 \mathbf{a} + a_2 \mathbf{b} + \dots$. Por ejemplo : $(4 , -1) = 2(1 , 1) + 1(2 , -3)$ en este caso diremos que $(4 , -1)$ es combinación lineal de $(1 , 1)$ y $(2 , -3)$. Hacer un

Vectores linealmente dependientes e independientes

Se dice que un conjunto de vectores son linealmente dependientes cuando cada uno de ellos puede expresarse como combinación lineal de los restantes . En caso contrario se dice que son independientes . La forma de comprobarlo es igualar al vector cero una combinación lineal de todos ellos , si no todos los coeficientes son nulos entonces son dependientes , en caso contrario son independientes .

Sistema de generadores

Un conjunto de vectores se dice que es un sistema generador si y solo si todo vector del espacio se puede expresar como combinación lineal de ellos .

Por ejemplo el vector $(1, 0)$ y $(0, 1)$ son sistema de generadores de \mathbb{R}^2 ya que cualquier vector se puede expresar como combinación lineal de ellos :

$(-8, 3) = -8(1, 0) + 3(0, 1)$ Hacer un dibujo para que se comprenda .

Para demostrar que son generadores se iguala una combinación lineal de ellos a un vector (a, b) , si al resolver el sistema podemos poner cualquier valor de a y b , entonces es que son sistema de generadores ya que generan cualquier vector .

Base

Un conjunto de vectores se dice que forman una base cuando son :

- sistema de generadores
- linealmente independientes

Coordenadas de un vector respecto de una base

Sea $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ una base , si se verifica la igualdad : $\mathbf{x} = x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2$ entonces a los coeficientes x_1 y x_2 se les llama coordenadas de \mathbf{x} respecto de la base B y componentes de \mathbf{x} a $x_1\mathbf{u}_1, x_2\mathbf{u}_2$.

Ejercicio : Comprobar que $(-1, 1)$ y $(2, -1)$ forman una base . Calcular las coordenadas de $(1, 2)$ respecto de esta base . Hacer un dibujo para que se comprenda .

Tipos importantes de bases

- Se dice que una base es **normada** cuando los vectores que la forman son unitarios , es decir de módulo unidad $|\mathbf{u}_1| = |\mathbf{u}_2| = 1$.
- Se dice que una base es **ortogonal** cuando los vectores son ortogonales o perpendiculares entre sí , por lo tanto $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = 0$
- Se dice que una base es **ortonormal** cuando es normada y ortogonal a la vez .

Cambio de base

El problema que vamos a resolver se enuncia así :

Conociendo las coordenadas (x_1, x_2) del vector \mathbf{u} en la base $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ hallar las coordenadas (x'_1, x'_2) de \mathbf{u} en la base $B' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2\}$

Para resolverlo se precisa conocer la expresión de los vectores de la primera base en función de los de la segunda base o viceversa :

$$\mathbf{u}_1 = a_{11}\mathbf{u}'_1 + a_{12}\mathbf{u}'_2$$

$$\mathbf{u}_2 = a_{21}\mathbf{u}'_1 + a_{22}\mathbf{u}'_2$$

Entonces :

$$\mathbf{u} = x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 = x_1(a_{11}\mathbf{u}'_1 + a_{12}\mathbf{u}'_2) + x_2(a_{21}\mathbf{u}'_1 + a_{22}\mathbf{u}'_2) = (x_1a_{11} + x_2a_{21})\mathbf{u}'_1 + (x_1a_{12} + x_2a_{22})\mathbf{u}'_2$$

Pero por otro lado :

$$\mathbf{u} = x'_1\mathbf{u}'_1 + x'_2\mathbf{u}'_2$$

Comparando las dos igualdades :

$$x_1' = x_1a_{11} + x_2a_{21}$$

$$x_2' = x_1a_{12} + x_2a_{22}$$

que son las fórmulas del cambio de base .

Ejercicio : Se sabe que el vector \mathbf{u} en la base B tiene por coordenadas $(3, 1)$, es decir

$\mathbf{u} = 3\mathbf{u}_1 + 1\mathbf{u}_2$. Hallar las coordenadas de \mathbf{u} respecto de la base B' sabiendo que :

$$\mathbf{u}_1 = 2\mathbf{u}_1' + \mathbf{u}_2'$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1' - 4\mathbf{u}_2'$$

Hacer un dibujo del problema . Poner en los ejes la base B' .

Expresión analítica del producto escalar

Sea $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ una base , y \mathbf{u} y \mathbf{v} dos vectores cualesquiera que se pueden expresar como combinación lineal de los vectores de la base .

$$\mathbf{u} = x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2$$

$$\mathbf{v} = y_1\mathbf{u}_1 + y_2\mathbf{u}_2$$

Por lo tanto tendremos que :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2) \cdot (y_1\mathbf{u}_1 + y_2\mathbf{u}_2) = x_1x_2/\mathbf{u}_1/2 + y_1y_2/\mathbf{u}_2/2 + (x_1y_2 + x_2y_1)\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2$$

Si la base es normada :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + (x_1y_2 + x_2y_1)\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2$$

Si la base es ortogonal :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = x_1x_2/\mathbf{u}_1/2 + y_1y_2/\mathbf{u}_2/2$$

Si la base es ortonormal : (Caso más importante y más sencillo)

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = x_1x_2 + y_1y_2$$

Ejercicio : Calcular $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, siendo $\mathbf{u} = 2\mathbf{u}_1 - 3\mathbf{u}_2 = (2, -3)$ y $\mathbf{v} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 = (1, 1)$ en los siguientes casos :

- $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ son dos vectores de módulo 2 y 3 respectivamente y forman 30°
- $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ son dos vectores unitarios que forman 45°
- $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ son dos vectores ortogonales , de módulos 3 y 4 respectivamente
- $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ son dos vectores ortonormales .

Expresión analítica del módulo de un vector

Ya vimos anteriormente que el módulo de un vector era :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = /u/ \cdot /u/ \cos 0 = /u/2 \Rightarrow /u/ = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$$
 por lo tanto :

$$/u/ = \{ (x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2) \cdot (x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2) \}^{1/2} = \{ x_1^2/\mathbf{u}_1/2 + x_2^2/\mathbf{u}_2/2 + 2x_1x_2\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2 \}^{1/2}$$

En el caso de que sea una base normada :

$$/u/ = \{ x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2 \}^{1/2}$$

Base ortogonal :

$$/u/ = \{ x_1^2/\mathbf{u}_1/2 + x_2^2/\mathbf{u}_2/2 \}^{1/2}$$

Base ortonormal:

$$/u/ = \{ x_1^2 + x_2^2 \}^{1/2}$$

Expresión cartesiana del coseno del ángulo que forman dos vectores

$$\cos(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{/u/ \cdot /v/}$$

Suponiendo el caso más sencillo , que es el de una base ortonormal , tendremos :

$$\cos(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{x_1y_1 + x_2y_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2}}$$

En el caso de que \mathbf{v} sea un vector de la base ortonormal , el cos se llama **coseno director** y es el coseno del ángulo que forma el vector \mathbf{u} con el vector de la base \mathbf{v} .

Ejercicio : Calcular el ángulo que forman entre sí , los vectores : $\mathbf{u}(2, 1)$ y $\mathbf{v}(-1, 3)$ sabiendo que estas coordenadas están expresadas respecto de una base ortonormal $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$, es decir :

$$\mathbf{u} = 2\mathbf{u}_1 + 1\mathbf{u}_2$$

$$\mathbf{v} = -1\mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2$$

$$\cos \alpha = \frac{2 \cdot (-1) + 1 \cdot 3}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{50}} = 0'14 \text{ luego } \alpha = 81'8^\circ$$

Hacer un dibujo suponiendo que la base ortonormal es la canónica .

Ejercicios :

1° Sea $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ una base tal que $|\mathbf{u}_1| = |\mathbf{u}_2| = 2$ y forman 60° . Calcular :

a) Módulo del vector $\mathbf{u} = 2\mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2$.

b) Producto escalar de los vectores $\mathbf{u} = 2\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$ y $\mathbf{v} = -4\mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2$

c) Valor de k para que los vectores $\mathbf{u} = 11\mathbf{u}_1 + k\mathbf{u}_2$ y $\mathbf{v} = \mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2$ sean ortogonales .

d) $\cos(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ siendo $\mathbf{u} = 2\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$ y $\mathbf{v} = -\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$

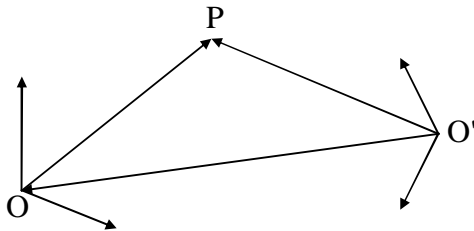
2° Responder a las preguntas anteriores pero suponiendo que sea $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ una base ortonormal .

Sistema de referencia

Un sistema de referencia en el plano está formado por un punto O que se llama origen del sistema , y por dos vectores que constituyen la base del sistema .

Cambio de sistema de referencia

Vamos a plantear el siguiente problema : consideremos dos sistemas de referencia en el plano $S = (O; \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ y $S' = (O'; \mathbf{u}_1', \mathbf{u}_2')$. Se sabe que el punto P tiene de coordenadas (x_1, x_2) respecto de S . Calcular las coordenadas de P respecto de S' .



La relación entre B y B' es :

$$\mathbf{u}_1 = a_{11}\mathbf{u}_1' + a_{12}\mathbf{u}_2'$$

$$\mathbf{u}_2 = a_{21}\mathbf{u}_1' + a_{22}\mathbf{u}_2'$$

Las coordenadas de O respecto de O' son (a , b)

Fijandonos en el dibujo :

$$\mathbf{O}'\mathbf{P} = \mathbf{O}'\mathbf{O} + \mathbf{OP}$$

Por lo tanto :

$$x_1'\mathbf{u}_1' + x_2'\mathbf{u}_2' = a\mathbf{u}_1' + b\mathbf{u}_2' + x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 = a\mathbf{u}_1' + b\mathbf{u}_2' + x_1(a_{11}\mathbf{u}_1' + a_{12}\mathbf{u}_2') + x_2(a_{21}\mathbf{u}_1' + a_{22}\mathbf{u}_2') = (a + x_1a_{11} + x_2a_{21})\mathbf{u}_1' + (b + x_1a_{12} + x_2a_{22})\mathbf{u}_2'$$

Comparando el principio con el final :

$$x_1' = a + x_1a_{11} + x_2a_{21}$$

$$x_2' = b + x_1a_{12} + x_2a_{22}$$

Ejercicio : Se conocen las coordenadas $(-1, 3)$ de un punto P respecto del sistema de referencia S . Se sabe además que O' tiene de coordenadas $(2, 4)$ respecto de O .

También se sabe que :

$$\mathbf{u}_1' = -2\mathbf{u}_2$$

$$\mathbf{u}_2' = -\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$$

Calcular las coordenadas de P respecto de S' .

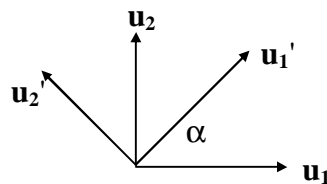
Hacer un dibujo .

Cambio de sistema de referencia ortonormales

En el caso de que las bases sean ortonormales , podemos calcular las coordenadas de \mathbf{u}_1 y \mathbf{u}_2 en función del ángulo que forman con los vectores \mathbf{u}_1' y \mathbf{u}_2' .

$$\mathbf{u}_1 = a_{11}\mathbf{u}_1' + a_{12}\mathbf{u}_2'$$

$$\mathbf{u}_2 = a_{21}\mathbf{u}_1' + a_{22}\mathbf{u}_2'$$



$$\mathbf{u}_1 = \cos\alpha \mathbf{u}_1' - \sin\alpha \mathbf{u}_2'$$

$$\mathbf{u}_2 = \sin\alpha \mathbf{u}_1' + \cos\alpha \mathbf{u}_2'$$

Luego tenemos :

$$x_1' = a + x_1 \cos\alpha + x_2 \sin\alpha$$

$$x_2' = b - x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha$$

En el caso de que haya una traslación de ejes , las bases siguen siendo las mismas , solo cambia el origen , haciendo $\alpha = 0$:

$$x_1' = a + x_1$$

$$x_2' = b + x_2$$

En el caso de que haya una rotación de ejes , los orígenes coinciden y $(a, b) = (0, 0)$ por lo que :

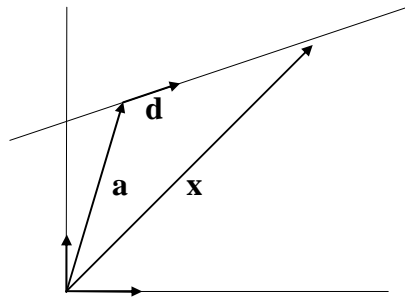
$$x_1' = x_1 \cos\alpha + x_2 \sin\alpha$$

$$x_2' = -x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha$$

Ejercicio : Calcular las coordenadas de P respecto de $S' = (O'; \mathbf{u}_1', \mathbf{u}_2')$ sabiendo que respecto de $S = (O; \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ son $(3, 4)$ y que S' está girado 45° respecto de S . Se supone que los sistemas son ortonormales .

PROPIEDADES MÉTRICAS DEL PLANO

Ecuaciones de la recta



Como se puede comprobar en el dibujo :

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + t\mathbf{d}$$

siendo $t \in \mathbb{R}$

Ec vectorial de la recta

Puesto que estamos utilizando un sistema de referencia $S = (O; \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ entonces tendremos :

$$(x, y) = (x_0, y_0) + t(d_1, d_2) \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + td_1 \\ y = y_0 + td_2 \end{cases} \quad \text{Ec paramétricas de la recta}$$

Despejando t e igualando :

$$\frac{x - x_0}{d_1} = \frac{y - y_0}{d_2}$$

Ec continua de la recta

Nota : en el caso de que d_1 o d_2 sean 0 entonces significa que los vectores directores son paralelos a los ejes y por tanto , si $d_1 = 0$ entonces $x = x_0 = \text{cte}$ recta paralela al eje y que pasa por $x = 3$, y análogamente para $d_2 = 0$.

Si pasamos todo al mismo miembro :

$$d_2x - d_1y - x_0d_2 + y_0d_1 = 0 \Rightarrow \mathbf{Ax + By + C = 0} \quad \text{Ec general de la recta}$$

siendo $A = d_2$ y $B = -d_1$

Se puede observar que A y B no son más que las componentes de un vector perpendicular al vector director ya que $(d_1, d_2) \cdot (A, B) = (d_1, d_2) \cdot (d_2, -d_1) = 0$

Si en la ec general despejamos C y dividimos por $-C$ obtenemos :

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1 \Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad \text{Ec canónica o segmentaria de la recta}$$

en este caso a y b son los puntos de corte con los ejes .

Si en la ec continua pasamos los denominadores a un miembro y los numeradores a otro obtenemos :

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{d_2}{d_1} = m \quad \text{Ec en la forma punto pendiente}$$

Si despejamos la y en esta ecuación :

$$y = mx - x_0m + y_0 \Rightarrow \boxed{y = mx + n} \quad \text{Ec explícita de la recta}$$

En esta ecuación la m nos da la inclinación de la recta y n nos da la ordenada en el origen o punto de corte con el eje y .

Ejercicio : Calcular las todas las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos A(2 , 3) y (-1 , 1) .

Posición relativa de dos rectas en el plano

Puede ocurrir 3 casos :

a) Que sean paralelas :

- Los vectores directores son dependientes o paralelos o proporcionales , pero ningun punto pertenece a las dos rectas a la vez .
- Tienen la misma pendiente m pero distinto n
- La relación entre los coeficientes de la ec general es $A/A'=B/B' \neq C/C'$

b) Que sean coincidentes :

- Los vectores directores son paralelos y los puntos pertenecen a las dos rectas a la vez .
- Tienen la misma pendiente y n
- La relación entre los coeficientes de la ec general es $A/A'=B/B'=C/C'$

c) Se corten :

- Los vectores directores no son paralelos
- Distinta m
- La relación entre los coeficientes de la ec general es $A/A' \neq B/B'$

Un caso particular de rectas que se cortan es el de rectas perpendiculares , veamos cuales son las condiciones para que dos rectas sean perpendiculares :

Si la recta r tiene de vector director (d_1 , d_2) una recta perpendicular a ella tendrá de vector director $(-d_2 , d_1)$ como ya vimos por lo que obtendremos :

recta r	recta paralela a r	recta perpendicular a r
$Ax + By + C = 0$	$Ax + By + C' = 0$	$-Bx + Ay + C = 0$
$y = mx + n$	$y = mx + n'$	$y = (-1/m)x + n'$
$(x , y) = (x_0 , y_0) + t(d_1 , d_2)$	$(x , y) = (x'_0 , y'_0) + t(d_1 , d_2)$	$(x , y) = (x'_0 , y'_0) + t(-d_2 , d_1)$

Ejercicio : Calcular la ecuación de la recta que pasa por el punto A(3 , -2) y es perpendicular a la recta $r \equiv 5x - 3y + 2 = 0$.

Calcular tambien una recta paralela a r y que pase por A .

Distancia entre dos puntos

La distancia entre dos puntos A y B es simplemente el módulo del vector que va desde A hasta B o al revés . Por lo tanto :

$$d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

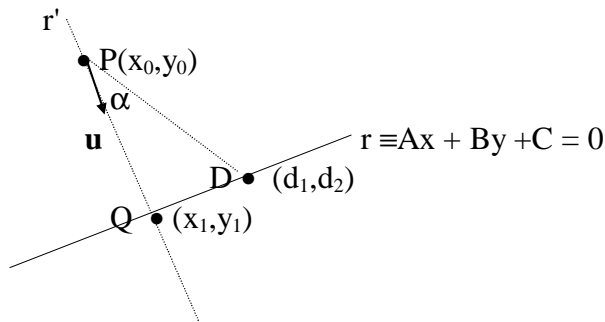
Distancia entre un punto y una recta

Para calcular la distancia mínima (perpendicular) de un punto P a una recta r podriamos seguir los siguientes pasos :

- calcular una recta r' perpendicular a r que pase por P

- calcular el punto de intersección Q entre r y r'
- calcular la distancia entre P y Q

Para simplificar las operaciones se utiliza la siguiente fórmula :



$$\mathbf{PD} \cdot \mathbf{u} = PD \cdot 1 \cdot \cos\alpha = PQ = d(P,Q)$$

Por otro lado :

$$\mathbf{PD} \cdot \mathbf{u} = (d_1 - x_0, d_2 - y_0) \cdot \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right) = \frac{-Ax_0 - By_0 + (Ad_1 + Bd_2)}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Puesto que D pertenece a r :

$$\mathbf{PD} \cdot \mathbf{u} = \frac{-Ax_0 - By_0 - C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = d(P,Q)$$

Puesto que la distancia debe de ser positiva tomaremos el valor absoluto :

$$d(P,r) = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$$

Ejercicio : Calcular la distancia del punto P (2 , -3) a la recta r ≡ y = 4x -10

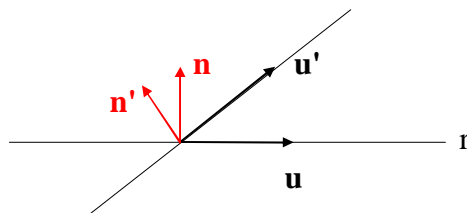
Distancia entre dos rectas

Para calcular la distancia entre dos rectas debemos de comprobar si son paralelas , después debemos de obtener un punto una de ellas y por último calcular la distancia de este punto a la otra recta .

Ejercicio : Calcular la distancia entre las rectas r ≡ 2x + 5y -8 = 0 y r' ≡ -4x -15y +10 = 0

Ángulo entre dos rectas

Se llama ángulo entre dos rectas secantes al menor de los ángulos que determinan dichas rectas , o lo que es lo mismo , al menor de los ángulos que forman sus vectores directores , o lo que es lo mismo , al menor de los ángulos que forman sus vectores perpendiculares .



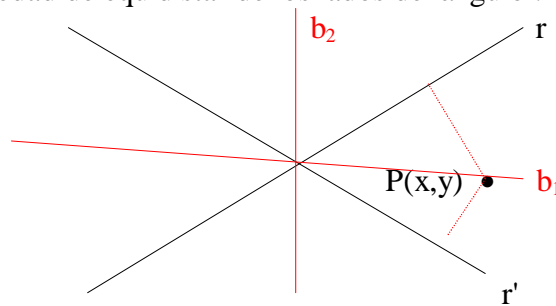
$$\cos(r, r') = \cos(\mathbf{u}, \mathbf{u}') = \cos(\mathbf{n}, \mathbf{n}') = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}'}{\|\mathbf{n}\| \cdot \|\mathbf{n}'\|} = \frac{|AA' + BB'|}{\sqrt{A^2 + B^2} \cdot \sqrt{A'^2 + B'^2}}$$

Ejercicio : Calcular el ángulo que forman las rectas :

$$r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{4} \quad \text{y} \quad r' \equiv \frac{x}{12} = \frac{y-3}{5}$$

Ecuación de las bisectrices de los ángulos que determinan dos rectas

Se llama bisectriz de un ángulo a la semirecta que tiene por origen al vértice del ángulo y divide a éste en dos partes iguales. Todos los puntos que pertenecen a la bisectriz poseen la propiedad de equidistar de los lados del ángulo.



Por ser P un punto de la bisectriz, la distancia de P a las rectas r y r' debe de coincidir por lo que :

$$\left| \frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right| = \left| \frac{A'x + B'y + C'}{\sqrt{A'^2 + B'^2}} \right|$$

Quitando los valores absolutos, obtendremos dos soluciones que son las ecuaciones de las dos bisectrices :

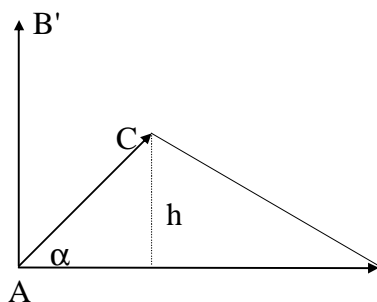
$$b_1 \equiv \frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{A'x + B'y + C'}{\sqrt{A'^2 + B'^2}}$$

$$b_2 \equiv \frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = -\frac{A'x + B'y + C'}{\sqrt{A'^2 + B'^2}}$$

Estas ecuaciones se pueden poner en forma general multiplicando en cruz.

Ejercicio : Calcular la ecuación de las bisectrices de los ángulos que determinan las rectas $r \equiv 3x - 4y + 5 = 0$ y $r' \equiv 6x + 8y + 1 = 0$.

Área de un triángulo



$$|AB| = |AB'|$$

$$h = |AC| \sin \alpha$$

B

$$\begin{aligned}\text{Área} &= 1/2 \cdot |\mathbf{AB}| \cdot h = 1/2 \cdot |\mathbf{AB}'| \cdot |\mathbf{AC}| \sin \alpha = 1/2 \cdot |\mathbf{AB}'| \cdot |\mathbf{AC}| \cos \beta = \\ &= 1/2 \cdot |\mathbf{AB}' \cdot \mathbf{AC}| \text{ donde se toma valor absoluto para que no salga un área negativa.}\end{aligned}$$

Ejercicio : Calcular el área del triángulo de vertices A(1 , 2) B(-1 , 4) y C(2 , 0) .