

# Vectores

---

Este tema pretende ser una introducción en el concepto de vectores para los alumnos de 4º de la ESO. Para ello se realizan estos apuntes con ejercicios que se irán explicando en el aula para su mayor comprensión.

## Introducción: Los Vectores como Extensión de los Números

El concepto de los números se desarrolló gradualmente. Primero fueron los enteros positivos, 1,2,3... (no el cero, que se incorporó más recientemente) los usados para reseñar los objetos contables, tales como ovejas, días, miembros de la tribu, etc.

El concepto de números negativos pudo surgir como una extensión de la resta, ó, quizás del dinero, lo que se debe es riqueza negativa, números rojos en la contabilidad.

Los objetos que pueden dividirse, por ejemplo el suelo, trajeron las fracciones. Luego, alrededor del año 500 a.C., un estudiante de Pitágoras probó que el número dado por la raíz cuadrada de 2 no se podía expresar como fracción; no lo encontró lógico y, por lo tanto, podemos decir que esos son números "irracionales". Por medio de ellos, enteros, fracciones e irracionales podemos describir cualquier cosa que tenga una dimensión, una magnitud.

Pero,¿ como podemos describir la velocidad, que tiene una magnitud y una dirección?

Para eso está el vector.

## Vectores: Definición.

Para definir los vectores utilizaremos una primera clasificación haciendo la distinción entre vectores fijos y vectores libres.

### VECTORES FIJOS

Un *vector fijo* del plano es un segmento cuyos extremos están dados en un cierto orden (se suele decir que es un segmento orientado). Se representa por  $\overrightarrow{AB}$ , siendo los extremos  $A$  y  $B$

Se considera como caso singular el vector fijo definido por un segmento cuyos extremos coinciden. En este caso el vector fijo se reduce a un solo punto.

Los puntos en los que empieza y termina un vector se llaman *origen* y *extremo*, respectivamente.

Módulo, dirección y sentido de un vector fijo:

Ü En un vector fijo se llama *módulo* del mismo a la longitud del segmento que lo define. El módulo de un vector fijo  $\overrightarrow{AB}$  se representa por  $|\overrightarrow{AB}|$  y se leerá «módulo de  $\overrightarrow{AB}$ ».

Ü La *dirección* de un vector fijo viene dada por la recta sobre la que podemos dibujar dicho vector, es decir depende de la inclinación o "pendiente" de dicha recta. Se dice que un vector fijo tiene la misma *dirección* que otro si los segmentos que los definen pertenecen a rectas paralelas.

Ü El *sentido* de un vector fijo viene dado por la posición en la que se encuentre la flecha que nos indica hacia donde va dicho vector. Dados dos vectores fijos  $\overrightarrow{AB}$  y  $\overrightarrow{CD}$  del plano que tengan la misma dirección, se dice que tienen el mismo *sentido* si los segmentos  $\overrightarrow{AD}$  y  $\overrightarrow{BC}$  (los segmentos que unen el origen de cada uno con el extremo del otro) tienen un punto en común. En otro caso se dice que los dos vectores tienen sentido contrario o sentido opuesto.

Vectores equipolentes:

Se dice que dos *vectores* son *equipolentes* si tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido.

Si  $\overrightarrow{AB}$  y  $\overrightarrow{CD}$  son equipolentes, el cuadrilátero  $ABCD$  es un paralelogramo.

## VECTORES LIBRES DEL PLANO

Un *vector libre* es el conjunto de todos los vectores fijos del plano que son equipolentes a uno dado. Como todos los vectores fijos del plano consistentes en un solo punto son equipolentes, definen un único vector libre, que recibirá el nombre de vector cero,  $\vec{0}$ .

Representantes de un vector libre:

A uno cualquiera de los vectores que constituyen un vector libre se le denomina *representante del vector libre*. Para representar un vector libre se escribe uno cualquiera de sus representantes, o bien se escribe una letra con una flecha encima,  $\vec{a}$ .

Resultado fundamental:

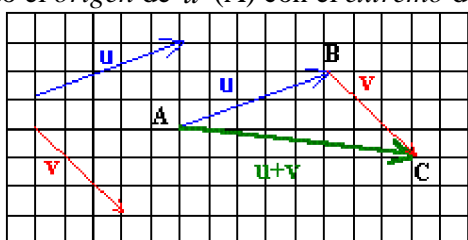
Dados un punto  $P$  y un vector libre del plano,  $\vec{a}$ , existe un único representante de  $\vec{a}$  con origen en  $P$ . Igualmente se puede encontrar un único representante de  $\vec{a}$  con extremo en el punto  $P$ .

**Vectores: Suma y resta.**

Lee detenidamente:

Hacemos  $\vec{u} + \vec{v}$ .

- A partir del punto A, ponemos el *origen* de  $\vec{u}$
  - En el *extremo* de  $\vec{u}$ , o sea en B, ponemos el *origen* de  $\vec{v}$ , hasta llegar a C
- Uniendo el *origen* de  $\vec{u}$  (A) con el *extremo* de  $\vec{v}$  (C) se obtiene el vector  $\vec{u} + \vec{v} = \vec{AC}$



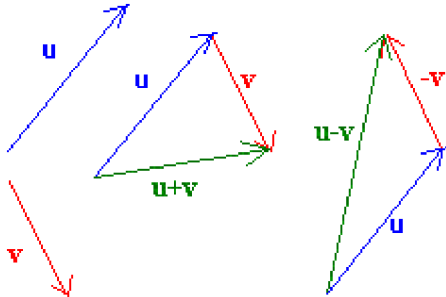
Mediante pares de números es más sencillo aún:

$$\vec{u} + \vec{v} = (5,2) + (3,-3) = (5+3,2-3) = (8,-1)$$

Ya hemos visto que para sumar dos vectores  $u$  y  $v$ , se sitúa  $v$  a continuación de  $u$ , de manera que el *origen* de  $v$  coincida con el *extremo* de  $u$ .

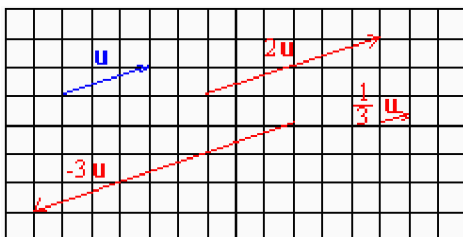
La suma  $u + v$ , es el vector cuyo *origen* es el de  $u$  y *extremo* el de  $v$ .

Para restar dos vectores  $u - v$ , se le suma a  $u$  el *opuesto* de  $v$  :  $u - v = u + (-v)$



**Vectores: Multiplicación por un número.**

- La flecha designada por  $u$  es un vector
- El vector  $2u$  tiene la misma dirección y el mismo sentido que  $u$  y es doble de largo, o sea su módulo es el doble.
- Análogamente se forman los vectores  $\frac{1}{3}u$  y  $-3u$  (éste está dirigido en sentido contrario a  $u$ )



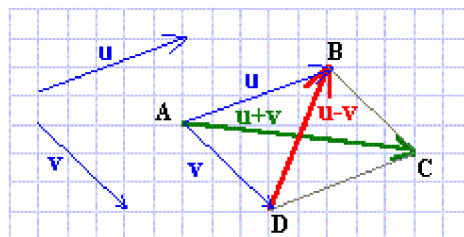
- El vector  $u$  avanza 3 y sube 1. Por eso lo designamos así:  $u(3,1)$ . Al par  $(3,1)$  se le llama componentes del vector  $u$ .

- Análogamente
  - $2u = (6,2)$ . Es decir,  $2u = 2(3,1) = (6,2)$
  - $-3u = (-9,3)$  retrocede 9 y baja 3
  - $\frac{1}{3}u = (1, \frac{1}{3})$

**Vectores: Suma y Resta de vectores en un paralelogramo.**

Si colocamos  $u$  y  $v$  con origen común y completamos un paralelogramo:

- La diagonal cuyo origen es el de  $u$  y  $v$  es el vector suma,  $u+v$ .



- La diagonal que va del extremo de  $v$  al extremo de  $u$  es  $u-v$

Para entenderlo mejor recuerda el primer método de sumar vectores y la igualdad de vectores:

$$u+v = AB + BC = AC = u+v$$

$$u-v = u+(-v) = DC + CB = DB = u-v$$

**Vectores: Coordenadas de un vector.**

a) Cualquier vector  $v$  se puede poner como combinación lineal (C.L.) de otros dos  $x$  e  $y$  de distinta dirección.

$$v = ax + by$$

Siendo  $a$  y  $b$  números.

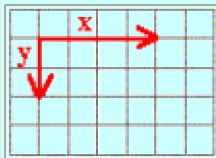
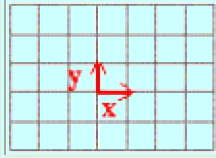
b) Esta C.L. es ÚNICA. Es decir, dados  $x$ ,  $y$  y  $v$ , sólo existen un par de números  $a$  y  $b$  que cumplen la igualdad anterior.

c) Observa también que los propios vectores  $x$  e  $y$  se pueden poner como C.L. de ellos mismos:

$x = 1.x + 0.y$	$y = 0.x + 1.y$
-----------------	-----------------

d) Dos vectores  $x$ ,  $y$ , con distinta dirección, forman una *base*, pues cualquier vector del plano se puede poner como C.L. de ellos.

e) Si los vectores de la *base* son perpendiculares entre sí, se dice que forman una *base ortogonal* y si, además, tienen módulo 1, se dice que forman una *base ortonormal*.

	Base ORTOGONAL	$x$ $y$
	Base ORTONORMAL	$x$ $y$ $ x  = 1$ $ y  = 1$

f) Cualquier vector del plano,  $v$ , se puede poner como C.L. de los elementos de una base  $B(x,y)$  de forma única:  $v = ax + by$ . A los números  $(a,b)$  se les llama *coordenadas* de  $v$  respecto de  $B$ , y se expresa así:  $v(a,b)$  o bien  $v = (a,b)$ .

**Vectores: Operaciones con coordenadas .**

SUMA: Comprueba en la siguiente escena como se *suman* las coordenadas de los vectores respecto de la base ortonormal  $B(x,y)$

$$u = (-2,3)$$

$$v = (5,2)$$

$$u + v = (-2+5,3+2) = (3,5)$$

### Vectores: Producto escalar de dos vectores

$$u \cdot v = |u| \cdot |v| \cdot \cos(u,v)$$

Producto de sus módulos por el coseno del ángulo que forman

¡Atención!  $|u|$ ,  $|v|$  y  $\cos(u,v)$  son números. El producto  $u \cdot v$  es un número. De ahí le viene el nombre, pues *escalar* significa *número*. O sea el resultado del producto escalar de dos vectores NO ES UN VECTOR, ES UN NÚMERO.

NOTA: A partir de ahora vamos a considerar siempre que las coordenadas de todos los vectores están referidas a la base ortonormal  $B(x,y)$ , siendo las componentes de  $x(1,0)$  y las de  $y(0,1)$

### Vectores: Propiedades del producto escalar .

1.- Comprueba que si  $u=0$  o  $v=0$ ,  $u \cdot v=0$

2.- Comprueba que si  $u$  es *perpendicular* a  $v$ ,  $u \cdot v=0$ , siendo  $u \neq 0$  y  $v \neq 0$ , pues entonces  $A=90^\circ$ , y el  $\cos 90^\circ=0$

3.- Propiedad conmutativa:  $u \cdot v = v \cdot u$

4.- Propiedad asociativa:  $a(u \cdot v) = (au) \cdot v$  ( $a =$  número,  $u =$  vector,  $v =$  vector)

5.- En una base ortonormal  $B(x,y)$  o sea  $x=(1,0)$   $y=(0,1)$  se cumple

$x \cdot x = 1$	Para comprobarlo pones en la escena anterior $u = x = (1,0)$ $v = x = (1,0)$
$y \cdot y = 1$	Para comprobarlo pones en la escena anterior $u = y = (0,1)$ $v = y = (0,1)$
$x \cdot y = y \cdot x = 0$	Para comprobarlo pones en la escena anterior $u = x = (1,0)$ $v = y = (0,1)$

6.- Propiedad distributiva:

$$u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$$

### Vectores: Expresión analítica del producto escalar.

Si las coordenadas de los vectores  $u$  y  $v$  respecto a una *base ortonormal* son:

$$u(u_1, u_2) \quad v(v_1, v_2)$$

el producto escalar queda así:

$$u \cdot v = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2$$

### Vectores: Módulo de un vector en función de sus coordenadas.

$$v \cdot v = |v| \cdot |v| \cdot \cos(v,v) = |v|^2 \cdot \cos 0 = |v|^2 \cdot 1 = |v|^2$$

Por tanto:  $|v| = \sqrt{v \cdot v}$

Si las coordenadas de  $v$  son  $(v_1, v_2)$

$$v \cdot v = v_1 \cdot v_1 + v_2 \cdot v_2 = v_1^2 + v_2^2$$

$$|v| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

### Vectores: Coseno del ángulo de dos vectores.

De la definición de producto escalar:  
 $u \cdot v = |u| \cdot |v| \cdot \cos(u,v)$

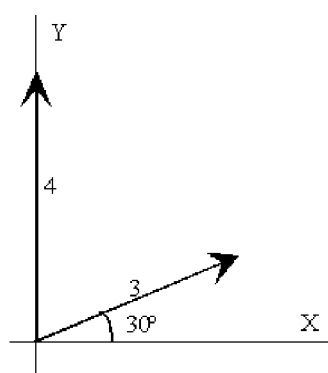
se deduce que:  $\cos(u,v) = \frac{u \cdot v}{|u| \cdot |v|}$

Y mediante las coordenadas:

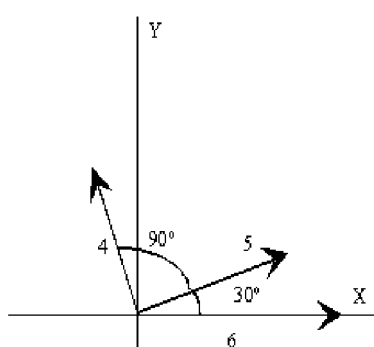
$$\cos(u,v) = \frac{u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

# Problemas

1.-Dados los dos vectores de la figura, efectuar gráficamente las siguientes operaciones.



$$\vec{u} + \vec{v}, \quad \vec{u} - \vec{v}, \quad \vec{v} - \vec{u}, \quad \vec{u} - 2\vec{v}$$



2.-Dados los vectores de la figura

- Hallar su suma geométrica
- Hallar las componentes de cada vector
- Hallar el vector suma
- El ángulo que forma el vector suma con el vector mayor.

3.-Un móvil se desplaza 100 m hacia el Este, 300 m hacia el Sur, 150 m en la dirección S 60° O, y 200 m en la dirección N 30° O.

- Representar el camino seguido por el móvil.
- Hallar el vector desplazamiento.

4.-Dados los vectores

$$a) \vec{u} = 2\vec{x} + 3\vec{y}$$

$$b) \vec{v} = -5\vec{x} + 7\vec{y}$$

$$c) \vec{w} = -3\vec{x} - 3\vec{y}$$

$$d) \vec{z} = 5\vec{x} - 2\vec{y}$$

$$\text{Calcula: } \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v}, 8\vec{w}, -\frac{2}{3}\vec{w}, \vec{u} \cdot \vec{v}, -5\vec{z} \cdot 6\vec{v}$$

5.-Encontrar el ángulo entre dos vectores de 10 y 15 unidades de longitud sabiendo que su resultante tiene 20 unidades de longitud.

6.-Encontrar el ángulo entre dos vectores de 8 y 10 unidades de longitud, cuando su resultante forma un ángulo de 50° con el vector mayor.

7.- Hallar el área de un paralelogramo cuyos lados no paralelos son los vectores

$$\vec{a} = 4\vec{u}_1 - 3\vec{u}_2 \text{ y } \vec{b} = 2\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2.$$

8.- Aplicando la definición de producto escalar, demostrar el teorema de Pitágoras.

9.-Demostrar que las dos diagonales de un rombo son perpendiculares.

## Trabajo sobre vectores

---

1.- Sean los vectores libres  $\vec{u} = \overrightarrow{(2,4)}$  y  $\vec{v} = \overrightarrow{(3,-3)}$ .

a) Dibújalos (tómese como origen de los vectores el origen de coordenadas).

b) Hallar  $2\vec{u}, \frac{1}{2}\vec{u}, -\vec{u}, -2\vec{u}$  y  $-\frac{1}{2}\vec{u}$ , y dibújalos.

c) Hallar  $3\vec{v}, \frac{1}{3}\vec{v}, -\vec{v}, -3\vec{v}$  y  $-\frac{1}{3}\vec{v}$ , y dibújalos.

2.- Sean los vectores libres  $\vec{u} = \overrightarrow{(-4,2)}$  y  $\vec{v} = \overrightarrow{(3,-9)}$ .

a) Dibújalos (tómese como origen el origen de coordenadas).

b) Hallar  $2\vec{u}$  y  $-2\vec{u}$ , dibújalos.

c) Hallar  $2\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v}$  y  $2\vec{u} - \frac{1}{3}\vec{v}$

3.- Sean los vectores libres  $\vec{u} = \overrightarrow{(4,-4)}$  y  $\vec{v} = \overrightarrow{(3,2)}$ .

a) Hallar  $\vec{u} + \vec{v}$

b) Dibujar  $\vec{u}, \vec{v}$  y  $\vec{u} + \vec{v}$  tomando como origen el punto  $(-3, 2)$ .

c) Dibujar  $\vec{u}, \vec{v}$  y  $\vec{u} + \vec{v}$  tomando como origen el punto  $(2, -1)$ .

4.- Calcula el módulo de los siguientes vectores:

a)  $\overrightarrow{(3,4)}$     b)  $\overrightarrow{(0,-4)}$     c)  $\overrightarrow{(-2,5)}$     d)  $\overrightarrow{(-5,12)}$     e)  $\overrightarrow{(\sqrt{2}, \sqrt{7})}$     f)  $\overrightarrow{\left(\frac{3}{5}, -\frac{2}{5}\right)}$

5.- Sean  $\vec{u} = \overrightarrow{(3,-4)}, \vec{v} = \overrightarrow{(2,5)}$  y  $\vec{w} = \overrightarrow{(-1,6)}$ . Calcular  $\vec{u} \cdot \vec{v}, \vec{u} \cdot \vec{w}$  y  $\vec{v} \cdot \vec{w}$ .

6.- ¿Cuáles de las siguientes parejas de vectores son ortogonales?

a)  $\overrightarrow{(1,2)}$  y  $\overrightarrow{(0,0)}$     b)  $\overrightarrow{(3,4)}$  y  $\overrightarrow{(4,-3)}$     c)  $\overrightarrow{(1,3)}$  y  $\overrightarrow{(3,1)}$     d)  $\overrightarrow{(6,-15)}$  y  $\overrightarrow{(-20,50)}$

7.- Calcular el ángulo que forman las siguientes parejas de vectores:

a)  $(2,1)$  y  $(3,4)$     b)  $(-1,4)$  y  $(2,3)$     c)  $(3,7)$  y  $(-7,3)$     d)  $(3,-2)$  y  $(2,-3)$

8.- Demostrar que  $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$