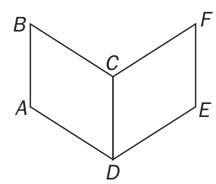
9 Vectores y coordenadas en el plano

1. En un sistema de coordenadas, dibuja 4 vectores, de coordenadas $\overrightarrow{MA} = (2, 3)$, $\overrightarrow{MB} = (-1, 4)$, $\overrightarrow{MC} = (-4, 3)$, $\overrightarrow{MD} = (-2, -1)$.

a) Calcula las coordenadas de los extremos de los vectores, si las coordenadas de M son $(1, 2)$.

b) Averigua si los puntos A, B, C y D forman un paralelogramo.

2. De los seis puntos de la figura, se conocen las coordenadas de cuatro de ellos: $A(2, 4)$, $B(5, 2)$, $C(7, 8)$ y $E(4, 5)$. Se sabe además que los puntos forman dos paralelogramos $ABCD$ y $DCFE$ con un lado común CD. Halla las coordenadas de los puntos D y F. Razona por qué los puntos $ABFE$ forman también un paralelogramo.



3. Considera el vector $\vec{v} = (-3, 4)$ y el punto $M(5, -3)$. Calcula las coordenadas del punto P en cada uno de los siguientes casos:

a) Cuando el punto M es el origen del vector y P su extremo.

b) Cuando el punto P es el origen del vector y M su extremo.

4. Dados los vectores $\vec{a} = (2, -3)$, $\vec{b} = (1, 2)$, $\vec{c} = (-3, 5)$, calcula las coordenadas de los siguientes vectores:

$\vec{m} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ $\quad$ $\vec{n} = 2\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{c}$ $\quad$ $\vec{p} = 2(\vec{a} - \vec{c}) - 3(\vec{a} + \vec{b} - \vec{c})$

5. Calcula las coordenadas de dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, sabiendo que su suma es el vector $\vec{s} = (1, 3)$ y su diferencia es el vector $\vec{d} = (1, 3)$. ¿Cuál de los dos vectores tienen mayor módulo?

6. Considera un segmento del plano de extremos los puntos A y B, tal que M es punto medio del mismo. Determina las coordenadas del punto desconocido en los casos siguientes:

a) Cuando se conocen las coordenadas de los extremos $A(4, 6)$ y $B(-2, 4)$.

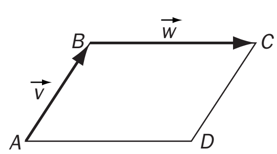
b) Cuando se conocen un extremo $A(3, -6)$ y el punto medio del segmento $M(-2, 1)$.

7. Dados los vectores $\vec{a} = (2, -3)$, $\vec{b} = (1, 2)$, $\vec{c} = (-3, 5)$, resuelve, cuando sea posible, las siguientes ecuaciones vectoriales:

a) $2\vec{a} - 3\vec{x} = 4\vec{b}$ siendo $\vec{x}$ el vector incógnita.

b) $2\vec{a} + x\vec{b} = \vec{c}$ siendo, en este caso, x el número incógnita.

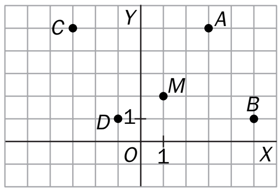
8. En el paralelogramo $ABCD$ de la figura se conocen los vectores $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$ y $\overrightarrow{BC} = \vec{w}$. Si $\vec{v} = \left(-\frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right)$ y $\vec{w} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{15}{2}\right)$, calcula cuánto miden las diagonales del paralelogramo.



9. Los puntos $A(-1, -4)$, $B(3, 1)$ y $C(-2, 5)$ son los vértices de un triángulo. Calcula su perímetro y di si es equilátero, isósceles o escaleno. ¿Se trata de un triángulo rectángulo?

SOLUCIONES

1. a)



$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OM} + (2, 3) = (1, 2) + (2, 3)$
$A(3, 5)$
$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OM} + (-1, 4) = (1, 2) + (4, -1)$
$B(5, 1)$
$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + (-4, 3) = (1, 2) + (-4, 3)$
$C(-3, 5)$
$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OM} + (-2, -1) = (1, 2) + (-2, -1)$
$D(-1, 1)$

b) $ABDC$ es un paralelogramo, dado que se verifica $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (2, -4) = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CD}$

2. En $ABCD$ se tiene $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$; $D = (4, 10)$.

En $DCFE$ se tiene $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$; $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$; $F = (7, 3)$.

En $ABCD$ se tiene $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ y en $DCFE$ se tiene $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EF}$; por tanto, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$, por lo que $ABEF$ es un paralelogramo.

3. a) $\overrightarrow{MP} = \vec{v}$; $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OM} = \vec{v}$
$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \vec{v} = (5, -3) + (-3, 4)$; $P(2, 1)$

b) $\overrightarrow{PM} = \vec{v}$; $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP} = \vec{v}$
$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} - \vec{v} = (5, -3) - (-3, 4)$; $P(8, -7)$

4. $\vec{m} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c} =$
$= (2, -3) + (-1, -2) + (-3, 5) = (-2, 0)$

$\vec{n} = 2\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{c} =$
$= (4, -6) + (1, 2) + (9, -15) = (14, -19)$

$\vec{p} = 2\vec{a} - 2\vec{c} - 3\vec{a} - 3\vec{b} + 3\vec{c} = -\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c} =$
$= (-2, 3) + (-3, -6) + (-3, 5) = (-8, 2)$

5. Los vectores verifican el sistema

$$\left.\begin{aligned} \vec{a} + \vec{b} &= \vec{s} \\ \vec{a} - \vec{b} &= \vec{d} \end{aligned}\right\} 2\vec{a} = \vec{s} + \vec{d};\ \vec{a} = \frac{1}{2}(\vec{s} + \vec{d}) =$$

$$= \frac{1}{2}[(1, 3) + (5, -1)];\ \vec{a} = (3, 1)$$

De la 1.ª ecuación se tiene:
$\vec{b} = \vec{s} - \vec{a} = (1, 3) - (3, 1)$; $\vec{b} = (-2, 2)$

Los módulos valen $|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$ y $|\vec{b}| = = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8}$, el vector de mayor módulo es $\vec{a}$.

6. a) $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{2}[(4, 6) + (-2, 4)] =$

$= \frac{1}{2}(2, 10)$; $M(1, 5)$

b) $\overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = (-4, 2) + (-3, 6)$;
$B(-7, 8)$

7. a) $2\vec{a} - 3\vec{x} = 4\vec{b}$; $\vec{x} = \frac{1}{3}(2\vec{a} - 4\vec{b}) =$

$= \frac{1}{3}[(4, -6) + (-4, -8)]$; $\vec{x} = \left(0, -\frac{14}{3}\right)$

b) $2\vec{a} + x\vec{b} = \vec{c}$; $(4, -6) + (x, 2x) = (-3, 5)$;

$$(4 + x, -6 + 2x) = (-3, 5) \left\{\begin{aligned} 4 + x &= 3 \\ -6 + 2x &= 5 \end{aligned}\right\}$$

No tiene solución.

8. Las diagonales del paralelogramo son los vectores $\overrightarrow{BD}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{v} + \vec{w} =$

$= \left(-\frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}, \frac{15}{2}\right)$; $\overrightarrow{AC} = (-5, 12)$, cuya medida es $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = 13$ u.

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \vec{v} - \vec{w} =$

$= \left(-\frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}, -\frac{15}{2}\right)$; $\overrightarrow{BD} = (-4, -3)$, cuya medida es $|\overrightarrow{BD}| = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = 5$ u.

9. El perímetro del triángulo viene dado por $p = |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}| + |\overrightarrow{CA}|$ siendo:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (3, 1) - (-1, -4) = (4, 5)$
$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41}$

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = (-2, 5) - (3, 1) = (-5, 4)$
$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{25 + 16} = \sqrt{41}$

$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} = (-1, -4) - (-2, 5) = (1, -9)$
$|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{1 + 81} = \sqrt{82}$

Por tanto, $p = 2\sqrt{41} + \sqrt{82} = 21{,}86$ u

El triángulo es isósceles y rectángulo, ya que
$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$ y $|\overrightarrow{CA}|^2 = 82 = 41 + 41 =$
$= |\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2$