

# 11 Ecuación de la circunferencia

- Halla las ecuaciones de las circunferencias que tienen el centro  $C$  y el radio  $R$ , que se indica en cada caso:
  - $C(0, 0)$  y  $R = 5$
  - $C(1, 0)$  y  $R = 3$
  - $C(0, -2)$  y  $R = 4$
  - $C(1, -1)$  y  $R = 2$
- Halla el centro  $C$  y el radio  $R$  de las siguientes circunferencias:
  - $x^2 + y^2 - 4x - 8 = 0$
  - $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$
  - $x^2 + y^2 - 5x + y - 3 = 0$
- Halla la ecuación de la circunferencia que tiene por centro el punto  $C(1, -1)$  y pasa por el punto  $A(4, 3)$ .
- Halla la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto de coordenadas  $C(-1, 1)$  y es tangente al eje de las abscisas. ¿Cuánto vale su radio?
- Determina las posiciones relativas de las circunferencias  $C_1$  y  $C_2$  dadas por las ecuaciones:
 
$$C_1: x^2 + y^2 - 4x = 0$$

$$C_2: x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$$
- Halla la posición relativa de la bisectriz del primer cuadrante respecto de la circunferencia que tiene de ecuación  $x^2 + y^2 - 2x = 0$ , determinando, según el caso, las coordenadas de sus dos puntos de corte o las del punto de tangencia.
- Estudia, utilizando el concepto de potencia de un punto  $P$  respecto de una circunferencia, la posición que ocupa el punto  $P(1, -1)$  con respecto de las circunferencias que tienen las siguientes ecuaciones:
  - $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$
  - $x^2 + y^2 + 2x + 4y = 0$
  - $x^2 + y^2 + 2x = 0$
- Halla la ecuación de las tangentes a la circunferencia  $x^2 + y^2 - 2 = 0$  que sean paralelas a la bisectriz del primer cuadrante. Determina las coordenadas del punto de tangencia con la circunferencia de cada una de las rectas calculadas.
- Determina los ejes radicales de las siguientes parejas de circunferencias:
  - La que tiene por diámetro el segmento que une los puntos de coordenadas  $A(2, 4)$  y  $B(-1, 8)$  con la de ecuación  $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$ .
  - Las de ecuaciones  $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 3 = 0$ ;  $x^2 + y^2 + 2x = 0$ .
- Determina qué punto del plano presenta la misma potencia respecto de las circunferencias cuyas ecuaciones son las siguientes:
 
$$x^2 + y^2 - 2 = 0; x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$$

$$x^2 + y^2 + 3x + 5y - 1 = 0$$

# SOLUCIONES

1. Las ecuaciones son las siguientes:

- a)  $x^2 + y^2 = 25$   
 b)  $(x - 1)^2 + y^2 = 9$ ;  $x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0$   
 c)  $x^2 + (y + 2)^2 = 16$ ;  $x^2 + y^2 + 4y - 12 = 0$   
 d)  $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$   
 $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$

2. Si  $C(a, b)$  es el centro y  $R$  el radio, se tiene:

- a)  $\{-2a = -4; -2b = 0; a^2 + b^2 - R^2 = -8\}$   
 $a = 2; b = 0$  y  $R = 2$   
 b)  $\{-2a = -2; -2b = 4; a^2 + b^2 - R^2 = 0\}$   
 $a = 1; b = -2$  y  $R = \sqrt{5}$   
 c)  $\{-2a = -5; -2b = 1; a^2 + b^2 - R^2 = -3\}$   
 $a = \frac{5}{2}; b = -\frac{1}{2}$  y  $R = 4$

3. La ecuación es de la forma  $(x - 1)^2 + (y + 1)^2$ , y por ser  $A$  un punto de la circunferencia se cumple  $(4 - 1)^2 + (3 + 1)^2 = R^2$ ;  $R = 5$ , por tanto, su ecuación es  $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 25$ ;  $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 23 = 0$ .

4. Por ser tangente al eje de abscisas, su radio es la distancia del centro al propio eje de abscisas,  $R = |1| = 1$ . La ecuación de la circunferencia es:  
 $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$   
 $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 1 = 0$

5. Sea  $d = d(C_1, C_2)$  la distancia entre los centros,  $s = R_1 + R_2$  la suma de los radios y  $f = R_1 - R_2$  la diferencia:

- $C_1: x^2 + y^2 - 4x = 0$ , su centro es  $C_1(2, 0)$  y su radio  $R_1 = 2$   
 $C_2: x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$ , su centro es  $C_2(-2, 1)$  y su radio  $R_2 = 3$   
 $d = \sqrt{(2 + 2)^2 + (0 - 1)^2} = \sqrt{17}$

siendo  $s = 2 + 3 = 5$  y  $f = 3 - 2 = 1$ . Como  $d < s$  y  $d > f$ , las circunferencias son secantes.

6. La bisectriz tiene de ecuación  $y = x$ . Los puntos de corte de la recta y la circunferencia verifican:

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 - 2x = 0 \\ y = x \end{array} \right\} 2x^2 - 2x = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 0; y_1 = 0 \\ x_2 = 1; y_2 = 1 \end{array} \right.$$

El sistema presenta dos soluciones; por tanto, la recta y la circunferencia son secantes y se cortan en los puntos  $A_1(0, 0)$  y  $A_2(1, 1)$ .

7. El valor de la potencia del punto  $P(1, -1)$  respecto de la circunferencia es:

- a)  $\text{Pot} = 1^2 + (-1)^2 - 2 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) = -4 < 0$ .  
 El punto es interior a la circunferencia.  
 b)  $\text{Pot} = 1^2 + (-1)^2 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) = 0$ .  
 El punto está sobre la circunferencia.  
 c)  $\text{Pot} = 1^2 + (-1)^2 + 2 \cdot 1 = 4 > 0$ . El punto es exterior a la circunferencia.

8. La tangente paralela a la bisectriz del primer cuadrante tiene de ecuación  $y = x + k$ . Para ser tangente ha de cortar a la circunferencia en un solo punto, así que el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 - 2 = 0 \\ y = x + k \end{array} \right.$$

ha de tener solución única. Sustituyendo:  
 $x^2 + (x + k)^2 - 2 = 0 \Rightarrow 2x^2 + 2kx + k^2 - 2 = 0$ , que ha de verificar:

$$(2k)^2 - 4 \cdot 2(k^2 - 2) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1 = -2; \text{ tangente } t_1: y = x - 2 \\ k_2 = 2; \text{ tangente } t_2: y = x + 2 \end{array} \right.$$

Tendremos dos puntos de tangencia  $T_1$  y  $T_2$ , cuyas coordenadas son solución de los sistemas:

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 - 2 = 0 \\ y = x - 2 \end{array} \right. \quad T_1(1, -1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 - 2 = 0 \\ y = x + 2 \end{array} \right. \quad T_2(-1, 1)$$

9. a) Primera circunferencia:

$$\text{Centro: } C = \left( \frac{2 - 1}{2}, \frac{4 + 8}{2} \right) = \left( \frac{1}{2}, 6 \right)$$

$$\text{Radio: } R = \frac{1}{2}d(A, B) = \frac{\sqrt{(-1 - 2)^2 + (8 - 4)^2}}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\text{Su ecuación es: } \left( x - \frac{1}{2} \right)^2 + (y - 6)^2 = \frac{25}{4}$$

$$x^2 + y^2 - x - 12y + 30 = 0$$

Restando las ecuaciones, se tiene para el eje radical la recta  $x - 16y + 30 = 0$

b) Restando ecuaciones, el otro eje radical es la recta  $4x - 4y - 3 = 0$

10. Es el centro radical de las tres circunferencias. Para calcularlo, hallamos el eje radical  $e_{12}$  de la 1.<sup>a</sup> y 2.<sup>a</sup>

y el eje radical  $e_{13}$  de la 1.<sup>a</sup> y 3.<sup>a</sup>. Sus ecuaciones son:  $e_{12}: -2x + 4y + 2 = 0$  y  $e_{13}: 3x + 5y + 1 = 0$ . El centro radical es la solución del sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} -x + 2y + 1 = 0 \\ 3x + 5y + 1 = 0 \end{array} \right. \quad x = \frac{3}{11}, y = -\frac{4}{11}$$

El punto es, por tanto,  $P\left(\frac{3}{11}, -\frac{4}{11}\right)$