15 Funciones de proporcionalidad inversa

1. Dada la función $y = \dfrac{x+2}{x-3}$, se pide:

a) Hallar los valores de a y b tal que la función se exprese en la forma $y = a + \dfrac{b}{x-3}$.

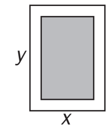
b) Calcular sus asíntotas y haz la gráfica de la función obtenida.

2. Calcula las asíntotas de la hipérbola de ecuación $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ y representa sobre un mismo sistema de ejes las funciones $f(x)$ y $g(x) = \left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|$. Indica la tendencia creciente o decreciente de las dos funciones consideradas.

3. Halla las asíntotas de la hipérbola de ecuación $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$; $c \neq 0$ sabiendo que pasa por los puntos de coordenadas $A(1, -1)$, $B(0, -4)$ y $C(2, 0)$. ¿Cuál es la tendencia creciente o decreciente de la función obtenida?

4. Una persona deja escrito en su testamento que sus bienes se repartan entre sus tres sobrinos de forma inversamente proporcional a sus edades. Calcula cuánto recibe cada uno de ellos si al fallecer su tío tienen 15, 20 y 25 años, respectivamente, y el patrimonio de la herencia es de 47 000 euros.

5. La figura muestra una hoja de papel de forma rectangular, de base x centímetros y altura y centímetros. La parte oscura está dedicada a colocar un texto impreso que ha de ocupar una superficie de 400 cm^2. Determina la fórmula que permite calcular la altura de la hoja en función de la anchura, sabiendo que hay que dejar unos márgenes superior e inferior de 2 cm, y dos laterales de 3 cm. Representa gráficamente la función resultante.



6. Al repartir un capital M de forma inversamente proporcional a las edades de tres hermanos: Antonio, de 3 años; Benito, de 5, y Carlos, de 10 años, respectivamente, la menor cantidad de dinero que se repartió fue de 42 euros. ¿A cuál de los tres hermanos le correspondió esa cantidad? ¿Cuánto dinero correspondió a los otros dos hermanos? ¿Qué cantidad se repartió?

7. Un grifo, que arroja un caudal de 35 litros por minuto, tarda en llenar un depósito de agua 1 hora y 20 minutos. Se pide:

a) ¿Cuánto tiempo tardarían en llenar el depósito cuatro de esos grifos?

b) ¿Cuál debería ser el caudal de un grifo para llenar el depósito en 1 hora y 10 minutos?

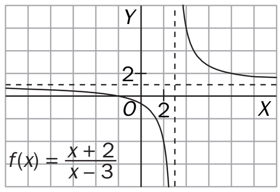
8. Considera la familia de hipérbolas de ecuación $y = \dfrac{k}{x}$, $k \neq 0$, y la recta r que pasa por los puntos $A(1, 0)$ y $B(0, 2)$. Calcula qué hipérbola de la familia es tangente a dicha recta y razona si la función que definen es creciente o decreciente.

SOLUCIONES

1. a) $y = \dfrac{x - 3 + 5}{x - 3} =$

$= 1 + \dfrac{5}{x - 3}$;

por tanto, $a = 1$ y $b = 5$.



b) Asíntotas: $x = 3$; $y = 1$. Corta a OX en $(-2, 0)$ y a OY en $\left(0, -\dfrac{2}{3}\right)$

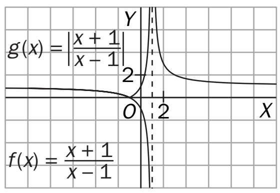
Su gráfica se muestra en la figura.

2. Para la gráfica de $f(x)$ se precisa conocer:

Dominio $= \boldsymbol{R} - \{1\}$.

Asíntotas: $x = 1$, $y = 1$

Corte con OX en $(-1, 0)$ y con OY en $(0, -1)$



Si $f(x) \geqslant 0$, las dos gráficas coinciden,

$$g(x) = |f(x)| = f(x)$$

Si $f(x) < 0$, cambiamos de signo las ordenadas

$$g(x) = |f(x)| = -f(x)$$

Las gráficas resultantes son las de la figura.

$f(x)$ es decreciente y $g(x)$ decrece siempre salvo en el intervalo $(-1, 1)$, donde resulta creciente.

3. Dividiendo por $c \neq 0$ se tiene $y = \dfrac{mx + n}{x + p}$, siendo $m = \dfrac{a}{c}$; $n = \dfrac{b}{c}$; $p = \dfrac{d}{c}$. El problema se reduce al cálculo de los tres parámetros m, n y p que verifican: $\left\{-4 = \dfrac{n}{p};\ -1 = \dfrac{m + n}{1 + p};\ 0 = \dfrac{2m + n}{2 + p}\right\} \longrightarrow$

$\longrightarrow m = 2$; $n = -4$; $p = 1$.

Por tanto, $y = \dfrac{2x - 4}{x + 1} = \dfrac{2(x + 1) - 6}{x + 1} \longrightarrow$

$\longrightarrow y = 2 - \dfrac{6}{x + 1}$, de tendencia decreciente igual que $y = \dfrac{k}{x}$, $k < 0$.

4. Sean A, B y C las cantidades que reciben los hermanos de 15, 20 y 25 años, respectivamente.

Se tiene: $\left.\begin{array}{l} A = \dfrac{k}{15};\ B = \dfrac{k}{20};\ C = \dfrac{k}{25} \\ A + B + C = 47\,000 \end{array}\right\}$

$\dfrac{k}{15} + \dfrac{k}{20} + \dfrac{k}{25} = 47\,000 \longrightarrow \dfrac{47k}{300} = 47\,000 \longrightarrow$

$\longrightarrow k = 300\,000$ y las cantidades que perciben son:

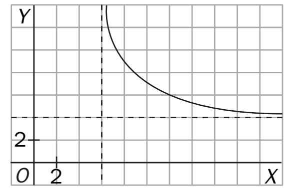
$A = \dfrac{300\,000}{15} = 20\,000$ €; $B = \dfrac{300\,000}{20} = 15\,000$ €;

$C = \dfrac{300\,000}{25} = 12\,000$ €.

5. De las condiciones del enunciado se tiene:

$(x - 6)(y - 4) = 400$

$y = 4 + \dfrac{400}{x - 6}$



La parte del dominio que interesa de esta función es $\{x \in \boldsymbol{R}/x > 6\}$, según el contexto del problema. Se trata de una hipérbola decreciente que tiene por asíntotas las rectas $x = 6$ e $y = 4$, siendo su gráfica la de la figura.

6. Sean A, B y C las cantidades que reciben Antonio, Benito y Carlos. La menor cantidad es la de Carlos, el mayor de los tres ($C = 42$ €). Siendo k la constante de proporcionalidad inversa, se tiene:

$$\left.\begin{array}{r} A = \dfrac{k}{3};\ B = \dfrac{k}{5};\ 42 = \dfrac{k}{10} \\ A + B + C = M \end{array}\right\}$$

$$k = 42 \cdot 10 = 420;\ A = \frac{420}{3} = 140 \text{ €};$$

$$B = \frac{420}{5} = 84 \text{ €};\ M = 140 + 84 + 42 = 266 \text{ €}$$

7. El caudal del grifo y el tiempo de llenado son magnitudes inversamente proporcionales, por tanto:

a) Si t es el tiempo de llenado, en minutos, de los 4 grifos:

$(4 \cdot 35) \cdot t = 35 \cdot (60 + 20) \longrightarrow$

$\longrightarrow t = 20$ minutos

b) Si x es el caudal necesario, en litros/minuto:

$x \cdot (60 + 10) = 35 \cdot (60 + 20) \longrightarrow$

$\longrightarrow x = 40$ litros/minuto

8. Si es $y = mx + b$ la ecuación de la recta, se tiene:

$\left.\begin{array}{r} 0 = m + b \\ 2 = b \end{array}\right\}\ m = -2;\ b = 2 \longrightarrow\ r\colon y = -2x + 2$

La condición de tangencia exige que el sistema $\left\{y = -2x + 2;\ y = \dfrac{k}{x}\right\}$ tenga solución única.

Igualando ordenadas:

$$-2x + 2 = \frac{k}{x} \longrightarrow 2x^2 - 2x + k = 0 \longrightarrow$$

$$\longrightarrow (-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot k = 0 \longrightarrow k = \frac{1}{2} > 0$$

La hipérbola de la familia tiene de ecuación $y = \dfrac{1}{2x}$, que resulta ser siempre decreciente.