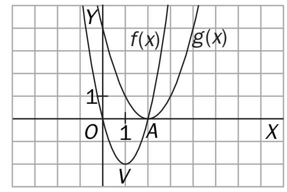
13 Funciones polinómicas

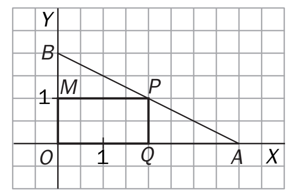
1. De dos parábolas cóncavas $f(x)$ y $g(x)$ se conocen los datos reseñados en la figura. Se pide:



a) Hallar las ecuaciones de las funciones correspondientes.

b) ¿Hay algún otro punto B distinto de A donde ambas gráficas se corten? Si es así, calcula las coordenadas de dicho punto B.

2. Sobre un segmento cuyos extremos son los puntos $A(4, 0)$ y $B(0, 2)$ se toma un punto $P(x, y)$ y, por él, se trazan un par de rectas paralelas a los ejes cartesianos. Halla las coordenadas del punto P de forma que el área del rectángulo $OMPQ$ sea la mayor posible.

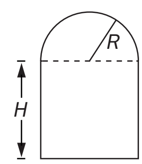


3. Dada la parábola de ecuación $y = x^2 + 2x - 3$, halla:

a) La ecuación de la recta s que la corta en los puntos de abscisas $x = -1$ y $x = 2$.

b) La ecuación de la recta t, tangente a la parábola y paralela a la recta s.

4. La figura muestra el marco de una ventana normanda, consistente en un rectángulo de altura H rematado en su parte superior por un semicírculo de radio R. Si el perímetro del marco es de 6 m, halla la superficie acristalada de esa ventana y el valor que debe darse al radio R para que entre la mayor claridad posible.



5. El valor V de una piedra preciosa es proporcional al cuadrado de su masa m, es decir, $V(m) = k \cdot m^2$, siendo k una constante que depende de las características de la gema. Se pide:

a) Probar que al dividir la piedra en dos trozos la gema se deprecia, es decir, pierde valor, calculando la depreciación $D(x)$ que sufre en función de la masa x de uno de los trozos.

b) Calcular cuándo la depreciación es máxima.

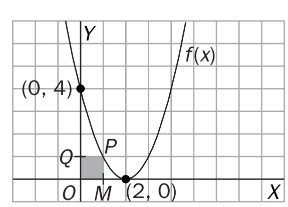
6. Dada la función polinómica $f(x) = x^2 - 3x^2$, represéntala gráficamente, calculando para ello:

a) Sus puntos de corte con los ejes, estudiando para los diferentes valores de la variable en qué intervalos la función toma valores positivos y en cuáles toma valores negativos.

b) Estudia en qué intervalos de la variable la función crece y en qué intervalos decrece, y deduce de ahí la existencia de máximos y mínimos relativos.

7. Se quiere cercar un campo rectangular mediante una valla, aprovechando un muro ya existente. Se sabe que la valla del lado opuesto al muro cuesta 6 € por metro, y la de los otros dos lados, 2 € por cada metro. Si el presupuesto disponible es de 1 200 €, halla el área del mayor recinto que puede cercarse.

8. La figura muestra la gráfica de una parábola $f(x)$, sobre la que se ha tomado un punto $P(x, y)$ tal que su abscisa verifica $0 \leqslant x \leqslant 2$. El punto P y el origen de coordenadas O son los vértices opuestos del rectángulo $OMPQ$ inscrito entre los ejes y la parábola. Se pide:



a) Determinar la expresión polinómica que define a la parábola $f(x)$.

b) Hallar la función $S(x)$ que permite calcular el área del rectángulo inscrito en función de x y calcular las coordenadas del punto P y el valor del área $S(x)$ para que el rectángulo sea un cuadrado.

SOLUCIONES

1. a) $\left\{\begin{array}{l} f(x) = ax^2 + bx, \text{ tal que } f(1) = -2,\ f(2) = 0 \\ \quad a = 2,\ b = -4 \\ g(x) = a(x - 2)^2, \text{ tal que } f(0) = 4 \\ \quad a = 1 \end{array}\right\}$

$\left.\begin{array}{l} f(x) = 2x^2 - 4 \\ g(x) = (x - 2)^2 \end{array}\right\}$

b) Cortes $f(x) = g(x)$; $(x - 2)^2 = 2x(x - 2)$;

$\left\{\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -2 \end{array}\right.$ hay dos puntos de corte $\begin{array}{l} A(2,\ 0) \text{ y} \\ B(-2,\ 16) \end{array}$

2. AB: $\dfrac{x - 4}{-4} = \dfrac{y}{2}$; AB: $x + 2y - 4 = 0$

$P(4-2y,\ y)$, de ahí $Q(4-2y,\ 0)$; $M(0,\ y)$, con $0 \leqslant y \leqslant 2$

Si S es el área del rectángulo, se tiene

$$S = OM \cdot OQ;\ S = 4y - 2y^2$$

parábola cóncava cuyo vértice tiene por abscisa

$$y = \frac{-4}{2 \cdot (-2)} = 1$$

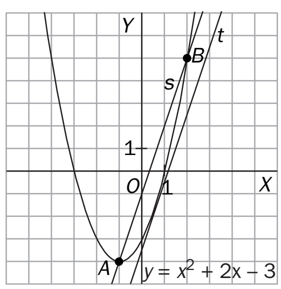
La solución es $P(2,\ 1)$.

3. La recta s está determinada por los puntos $A(-1, -4)$ y $B(2,\ 5)$ de pendiente

$$m_s = \frac{5 - (-4)}{2 - (-1)} = 3$$

Su ecuación es

$$3x - y - 1 = 0$$



La ecuación de t es $y = 3x + k$, y como t tiene un solo punto común con la parábola, la ecuación

$$x^2 + 2x - 3 = 3x + k \equiv x^2 - x - (3 + k) = 0$$

ha de tener una solución; por tanto,

$$(-1)^2 + 4(3 + k) = 0$$

$$k = -\frac{13}{4} \Rightarrow t\text{: } y = 3x - \frac{13}{4}$$

4. $\left.\begin{array}{l} \text{Perímetro } 3{,}14R + 2R + 2H = 6 \\ \text{Superficie } S = 2RH + 1{,}57\ R^2 \end{array}\right\}$

$\left.\begin{array}{l} H = 3 - 2{,}57R \\ S = 2R(3 - 2{,}57R) + 1{,}57\ R^2 \end{array}\right\} S = 6R - 3{,}57\ R^2$

La función área es una parábola cóncava cuyo vértice tiene de abscisa

$$R = -\frac{6}{2 \cdot (-3{,}57)} \approx 0{,}84 \text{ m y } H \approx 0{,}84 \text{ m}$$

5. a) Si dividimos la gema en dos trozos de masas x y $m - x$ de valores $V_1 = kx^2$ y $V_2 = k(m - x)^2$, respectivamente, la depreciación es

$$D(x) = V - (V_1 + V_2) = km^2 - [kx^2 + k(m - x)^2]$$

y, operando, $D(x) = 2kx(m - x)$.

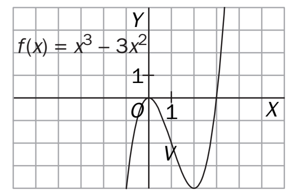
Como $0 < x < m$, resulta que $D(x) > 0$; por tanto, la gema se deprecia.

b) La función de depreciación $D(x) = 2kmx - 2kx^2$ es una parábola cóncava. El vértice es el punto de abscisa

$$x = -\frac{2km}{2 \cdot (-2k)} = \frac{m}{2}$$

La mayor depreciación se da al dividir la gema por la mitad.

6. a) El dominio es $\mathbf{R}$. Cortes con los ejes y signo de la función:



$\left\{\begin{array}{l} OX\text{: } f(x) = 0;\ x^2 - 3x^2 = 0;\ x = 0,\ x = 3 \\ OY\text{: } f(0) = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (0,\ 0) \\ (3,\ 0) \end{array}$

$\left\{\begin{array}{l} f(x) > 0, \text{ si } x > 3 \\ f(x) < 0, \text{ si } x < 3,\ x \neq 0 \end{array}\right.$

b) $TVM_{[x,\ x+h]} = \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$

$TVM_{[x,\ x+h]} = 3x^2 + 3x(h - 2) + h(h - 3) \longrightarrow$

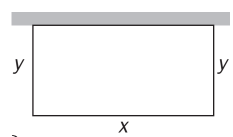
$\xrightarrow{\text{si } h \approx 0} TVM = 3x^2 - 6x$

Signo de TVM:

$\left\{\begin{array}{l} TVM > 0, \text{ si } x < 0 \text{ o } x > 2;\ f(x) \text{ crece} \\ TVM < 0, \text{ si } 0 < x < 2;\ f(x) \text{ decrece} \end{array}\right\}$

hay máximo en $x = 0$ y mínimo en $x = 2$.

7. Tomando como referencia las dimensiones del cercado de la figura, se tiene:



$\left.\begin{array}{l} \text{Presupuesto: } 4y + 6x = 1\,200 \\ \text{Superficie cercada: } S = xy \end{array}\right\}$

$\left.\begin{array}{l} y = 300 - 1{,}5x \\ S = 300x - 1{,}5x^2 \end{array}\right\}$

La superficie viene definida por una parábola cóncava, cuyo máximo se obtiene para

$$x = -\frac{300}{2(-1{,}5)} = 100 \text{ m e } y = 150 \text{ m}$$

8. a) $f(x) = (x - 2)^2$ (ver la solución del problema 1).

b) Al ser $P(x,\ y)$ un punto de la parábola, tiene por coordenadas $P[x,\ (x - 2)^2]$; por tanto, los lados del rectángulo son $OM = x$ y $OQ = (x - 2)^2$.

La función superficie del rectángulo es

$$S(x) = OM \cdot OQ = x(x - 2)^2$$

Para ser un cuadrado:

$OM = OQ \longrightarrow\ x = (x - 2)^2 \longrightarrow\ x^2 - 3x + 4 = 0$

$x = 1 \longrightarrow\ S(1) = 1$ unidad

$x = 4$ imposible ya que $x > 2$