14 Funciones exponenciales y logarítmicas

1. Ordena de menor a mayor las siguientes potencias de base 2 y comprueba los resultados con ayuda de tu calculadora:

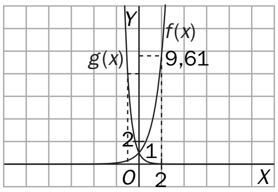
$$2^{-1};\ 2^{\sqrt{2}};\ 2^{-3};\ 2^{\frac{3}{2}};\ 2^{-2,5};\ 2^{\sqrt{3}} \text{ y } 2^{1,7}$$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

$4 \cdot 5^{1-3x} = 100$ $\quad 8 \cdot 6^x = 3^x$ $\quad (4^x + 16)(3^x - 27) = 0$ $\quad \sqrt{3\sqrt{3}} = 3^{2x+1}$

3. Calcula los valores de k y a para que la función de crecimiento exponencial $f(x) = k \cdot a^{2x-1}$ pase por los puntos de coordenadas (0, 2) y (1, 18). La función resultante, ¿es creciente o decreciente? Haz un esbozo de su gráfica.

4. Dos funciones exponenciales $f(x)$ y $g(x)$ presentan las gráficas que se muestran en la figura.



a) ¿De qué funciones se trata?

b) Calcula los valores $f(-1)$, $f(3)$, $g(-3)$ y $g(1)$

5. Forma una tabla de valores enteros para representar la función $f(x) = 2^x$ y, a partir de ella, construye las gráficas de las funciones $g(x) = -1 + 2^x$ y $h(x) = 2^{x-2}$

6. Si colocas un capital de 1 000 euros a un interés anual del 3,5 %,

a) ¿Qué cantidad de dinero tendrás en 6 años? ¿Qué beneficio habrás obtenido?

b) ¿En cuántos años se doblará el capital: 10, 15, 20, 25, 30, ... años? Utiliza el método ensayo/error.

7. Una población de bacterias se reproduce con arreglo a la siguiente ley de crecimiento: $P(t) = 1 + 3^{t-1}$, donde t representa el número de días transcurridos desde el inicio del cultivo, y $P(t)$, el número de bacterias, en miles, presentes en el cultivo, transcurridos t días desde su inicio. Calcula:

a) El número inicial de bacterias presentes al iniciar el cultivo.

b) El número de bacterias que se han generado entre el quinto y el décimo día de iniciar el cultivo.

8. Sean $f(t)$ y $g(t)$ dos funciones que permiten calcular los precios de los productos al cabo de t años. Si eres comprador, ¿cuál de las dos funciones prefieres que te apliquen? Justifica las respuestas en cada uno de los casos siguientes:

a) $f(t) = 2t, \quad g(t) = 2^t$

b) $f(t) = 0{,}2t, \quad g(t) = 0{,}2^t$

SOLUCIONES

1. Teniendo en cuenta que la función $f(x) = 2^x$ es creciente, se tiene:

$$-3 < -2{,}5 < -1 < \sqrt{2} < \frac{3}{2} < 1{,}7 < \sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^{-3} < 2^{-2{,}5} < 2^{-1} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{\frac{3}{2}} < 2^{1{,}7} < 2^{\sqrt{3}}$$

Comprobamos: $2^{-3} = 0{,}125$; $2^{-2{,}5} \approx 0{,}1768$;
$2^{-1} = 0{,}5$; $2^{\sqrt{2}} \approx 2{,}6651$; $2^{\frac{3}{2}} \approx 2{,}8284$;
$2^{1{,}7} \approx 3{,}249$; $2^{\sqrt{3}} \approx 3{,}322$

2. $4 \cdot 5^{1-3x} = 100 \Rightarrow 5^{1-3x} = 25 = 5^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 - 3x = 2 \Rightarrow x = -\dfrac{1}{3}$

$8 \cdot 6^x = 3^x \Rightarrow 8 = \left(\dfrac{3}{6}\right)^x \Rightarrow 2^3 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^{-x} = 2^3 \Rightarrow x = -3$

$(4^x + 16)(3^x - 27) = 0 \xrightarrow{4^x + 16 > 0} 3^x - 27 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3^x = 27 = 3^3 \Rightarrow x = 3$

$\sqrt{3\sqrt{3}} = 3^{2x+1} \Rightarrow (3 \cdot 3^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = 3^{2x+1} \Rightarrow$

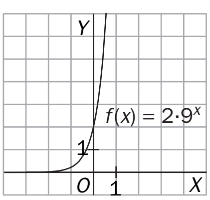
$\Rightarrow 3^{\frac{3}{4}} = 3^{2x+1} \Rightarrow 2x + 1 = \dfrac{3}{4} \Rightarrow x = -\dfrac{1}{8}$

3. $f(x) = k \cdot a^{2x-1}$; $\left\{\begin{array}{l} f(0) = k \cdot a^{-1} = 2 \\ f(1) = k \cdot a = 18 \end{array}\right\}$

$\dfrac{k \cdot a}{k \cdot a^{-1}} = 9 = 3^2 \Rightarrow a = 3;\ k = 6$

La función es:
$f(x) = 6 \cdot 3^{2x-1} =$
$= 2 \cdot 3 \cdot 3^{2x-1} = 2 \cdot 3^{2x} \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x) = 2 \cdot 9^x$

Se trata de una función exponencial de base $9 > 1$, creciente.



4. a) Ambas funciones pasan por el punto (0, 1); por tanto, $f(x) = a^x$ y $g(x) = b^x$, tal que $a > 1$ y $b < 1$.

$f(2) = a^2 = 9{,}61 \Rightarrow a = \sqrt{9{,}61} = 3{,}1$

$f(x) = 3{,}1^x$

$g(-1) = b^{-1} = 8 \Rightarrow b = \dfrac{1}{8};\ g(x) = \left(\dfrac{1}{8}\right)^x = 8^{-x}$

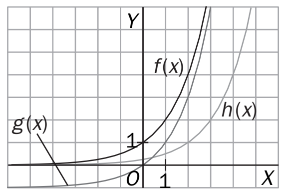
b) $f(-1) = 3{,}1^{-1} = 0{,}3226$;
$f(3) = 3{,}1^3 = 29{,}721$; $g(-3) = 8^3 = 512$;

$g(1) = \dfrac{1}{8} = 0{,}125$

5. La gráfica de $g(x)$ se obtiene desplazando hacia abajo la gráfica de $f(x)$ una unidad, y la gráfica de $h(x)$ se obtiene desplazando hacia la derecha la gráfica de $f(x)$ dos unidades.

De la tabla de valores para la función $f(x)$, se llega a las gráficas que se reproducen a continuacion:

x	$f(x)$
…	…
–3	1/8
–2	1/4
–1	1/2
0	1
1	2
2	4
3	6
…	…



6. a) Sea $C(t)$ el capital obtenido al cabo de t años, se tiene:

$C(t) = C_0(1 + r)^t \Rightarrow C(t) = 1\,000 \cdot 1{,}035^t$

$C(6) = 1\,000 \cdot 1{,}035^6 = 1\,292{,}26$ €

que es el capital obtenido en 6 años.

El beneficio es de unos 292,60 €.

b) Debe verificarse $2\,000 = 1\,000 \cdot 1{,}035^t = 2$, y, ensayando los valores de t, queda $t \approx 20$ años.

7. a) El número inicial es $P(0) = 1 + 3^{-1} = \dfrac{4}{3} = 1{,}333$ miles de bacterias, es decir, unas 1 333 bacterias.

b) Dicho número es $P(10) - P(5) = 1 + 3^9 - (1 + 3^4) = 3^9 - 3^4 = 19\,602$, es decir, 19 602 000 bacterias.

8. Calculamos las tasas de variación, en cada caso, de ambas funciones en t años. Se tiene:

a) $TV_f = f(t) - f(0) = 2t$

$TV_g = g(t) - g(0) = 2^t - 1$, si $t \geqslant 3$

de donde $TV_g > TV_f$, es preferible $f(t)$.

b) $TV_f = f(t) - f(0) = 0{,}2t$

$TV_g = g(t) - g(0) = 0{,}2^t - 1$, si $t \geqslant 1$

de donde $TV_f > TV_g$, es preferible $g(t)$.