

14 Funciones exponenciales y logarítmicas

CRITERIOS

A. Reconocer las funciones de crecimiento exponencial.

B. Saber trazar las gráficas de funciones exponenciales.

C. Plantear y resolver problemas en los que incidan situaciones de crecimiento exponencial.

D. Conocimiento básico de los logaritmos y su relación con la función exponencial.

ACTIVIDADES

1. Considera las siguientes funciones exponenciales:

I. $a(x) = 2^x$

II. $b(x) = 2^{-x}$

III. $c(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}$

IV. $d(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1-x}$

Para cada una de ellas:

- Construye una tabla de valores.
- Indica si es creciente o decreciente.
- Represéntala.

2. Dada la función $f(x) = 2^x + 2^{-x}$, se pide:

- Estudiar si es par o impar.
- Completar la siguiente tabla de valores:

| | | | | | | | |
|--------|----|----|----|---|---|---|---|
| x | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| $f(x)$ | | | | | | | |

c) Representarla gráficamente.

3. Calcula los valores de k , a y $f(-2)$ para que la gráfica de la función exponencial pase por los puntos $A(1, 10)$ y $B(3, 40)$.

4. Se dispone de un capital de 4 000 euros que colocamos en un banco al 2,5 % de interés anual. ¿De qué capital dispondremos al cabo de 10 años? ¿Dentro de cuánto tiempo habremos conseguido unos intereses de 2 000 euros?

5. La masa en gramos de cierto isótopo radiactivo viene dada por la función $M(t) = 8 \cdot 2^{-0,00005t}$, siendo t el número de años transcurridos. ¿Al cabo de cuántos años la masa será de 2 gramos?

Si la vida media es el tiempo necesario para que el isótopo reduzca su masa a la mitad, ¿cuál es la vida media de ese isótopo?

6. Aplica la definición de logaritmo para calcular los siguientes logaritmos en las bases que se indican:

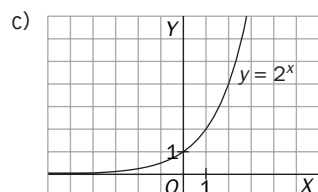
- $\log_4(2)$
- $\log_{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{9}\right)$
- $\log_{\frac{1}{5}}(125)$
- $\log 0,001$

SOLUCIONES

1. I. Función: $a(x) = 2^x$

| | | | | | | | |
|------|-------|------|-----|---|---|---|---|
| x | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| a(x) | 0,125 | 0,25 | 0,5 | 1 | 2 | 4 | 8 |

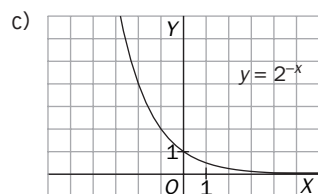
a) Es creciente.



II. Función: $b(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{a(x)}$

| | | | | | | | |
|------|----|----|----|---|-----|------|-------|
| x | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| a(x) | 8 | 4 | 2 | 1 | 0,5 | 0,25 | 0,125 |

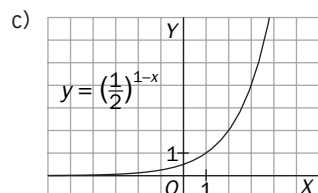
a) Es decreciente.



III. Función: $c(x) = \frac{1}{2} \cdot a(x)$

| | | | | | | |
|------|-------|------|-----|---|---|---|
| x | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| a(x) | 0,125 | 0,25 | 0,5 | 1 | 2 | 4 |

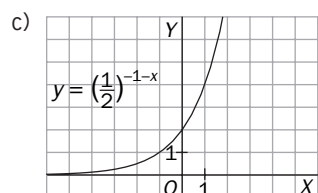
a) Es decreciente.



IV. Función: $d(x) = 2 \cdot a(x)$

| | | | | | | |
|------|------|-----|----|---|---|---|
| x | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
| a(x) | 0,25 | 0,5 | 1 | 2 | 4 | 8 |

a) Es decreciente.



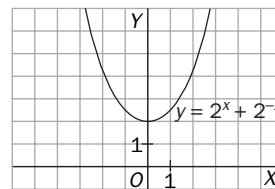
2. a) $f(-x) = 2^{-x} + 2^{-(-x)} = 2^x + 2^{-x} = f(x)$

Es una función par.

b) Basta con hallar valores positivos, ya que, por ser par, tiene simetría respecto del eje OY.

| | | | | |
|------|---|-----|------|-------|
| x | 0 | 1 | 2 | 3 |
| f(x) | 5 | 2,5 | 4,25 | 8,125 |

b) Es positiva en todo su dominio.



3.
$$\left. \begin{aligned} f(1) = 10 &= k \cdot a \\ f(3) = 40 &= k \cdot a^3 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} a^2 &= 4 \\ k &= \frac{10}{a} \end{aligned} \left\} \begin{aligned} a &= 2 \\ k &= 5 \end{aligned} \right.$$

$$f(x) = 5 \cdot 2^x \quad f(-2) = \frac{5}{4} = 1,25$$

4. Al cabo de t años dispondremos de:

$$C(t) = 4000 \cdot 1,025^t$$

Al cabo de 10 años dispondremos de:

$$C(10) = 5120,38 \text{ €}$$

Para conseguir unos intereses de 2000 euros, necesitamos un tiempo t :

$$6000 = 4000 \cdot 1,025^t \Rightarrow t = 16,42$$

Solución: 16 años y 5 meses

5. Si la masa debe ser de 2 gramos y T es la vida media: $4 = 8 \cdot 2^{-0,0005T}$

De donde: $T = 2000$ años

Si la masa debe reducirse a la mitad:

$$2 = 8 \cdot 2^{-0,0005t}$$

$$t = 6000 \text{ años}$$

6. a) $\log_4(2) = a \Rightarrow 4^a = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

b) $\log_{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{9}\right) = b \Rightarrow \sqrt{3}^b = \frac{1}{9} \Rightarrow b = -4$

c) $\log_{\frac{1}{5}}(125) = c \Rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^c = 125 \Rightarrow c = -3$

d) $\log 0,001 = d \Rightarrow 10^d = 0,001$

$$10^d = 10^{-3} \Rightarrow d = -3$$