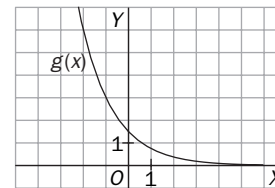
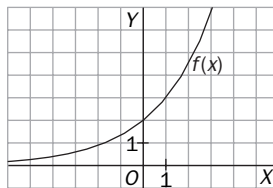


14 Funciones exponenciales y logarítmicas

1. Se considera la función exponencial $f(x) = k^x$; $k > 0$. Averigua, en cada uno de los siguientes casos, cómo es la base de la función con respecto a la unidad (menor, igual o mayor):

- a) $f(3) < 1$ b) $f(0,5) > 3$ c) $f(1) > 2$ d) $f(2) < 0$

2. En la figura se consideran las gráficas de dos funciones exponenciales que tienen como expresión $f(x) = a \cdot b^x$ y $g(x) = c \cdot d^x$, respectivamente. A partir de la información suministrada por esas gráficas, halla los valores que toma cada una de las funciones en el punto de abscisa $x = 2$, sabiendo que $f(x)$ toma el valor 6,75 para $x = 3$ y $g(x)$ toma el valor 3 para $x = -1$.



3. Halla, con un error inferior a una décima, las soluciones de las siguientes ecuaciones exponenciales:

- a) $8^{-x^2} = \frac{1}{4}$ b) $2^{\frac{x+2}{x}} = 2^x$ c) $8^x = 5^{3-x}$

4. Aplica la definición de logaritmo para resolver las siguientes ecuaciones logarítmicas:

$$\log(11x - 1) = 1 \qquad \log \frac{2x}{x + 1} = -2 \qquad \log \frac{x^2}{x + 6} = 0$$

5. Para repoblar un lago de truchas se introdujo una cierta cantidad de individuos. Se sabe que a los tres años el número de truchas era de 4 000, y a los cinco años la población era de 8 000 truchas. Suponiendo que el crecimiento de la población de truchas sigue una ley exponencial, se pide:

- a) ¿Cuántas truchas se introdujeron al principio?
 b) Si, como consecuencia de ciertos vertidos nocivos en el lago, al final del quinto año la población se redujo a la cuarta parte, ¿cuántos años han de transcurrir para que el número de truchas sea el mismo que había al principio de ese año?

6. Un prestamista intenta convencer a sus clientes de que es mucho mejor contratar un préstamo al 1 % de interés mensual que contratar el mismo préstamo al 12 % anual. De esa forma, dice: «Se paga lo mismo, pero es más cómoda la devolución de la deuda mes tras mes que año tras año». Averigua qué resulta mejor para el cliente y qué es lo que se "trae" entre manos el prestamista. Puedes analizarlo con un préstamo de 60 000 euros a 10 años, por ejemplo.

7. Aplica la definición de logaritmo para probar las siguientes propiedades de los logaritmos:

$$\log_a M \cdot N = \log_a M + \log_a N \qquad \log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N \qquad \log_a M^p = p \cdot \log_a M$$

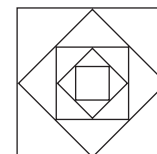
8. Se calcula que un bosque tiene 24 000 m³ de madera y que aumenta a un ritmo del 3,5 % anual. Otro bosque tiene 48 000 m³ de madera y su ritmo de crecimiento es el mismo que el del primero, se pide:

- a) ¿Cuántos años han de transcurrir para que el primer bosque tenga la misma madera que el segundo?
 b) ¿Son precisos el mismo número de años para que cada bosque triplique su contenido en madera?

Nota: Utiliza la calculadora y haz los cálculos por tanteo con aproximaciones de un año.

9. Tomando como vértices los puntos medios de los lados de un cuadrado de área A_0 , se inscribe otro cuadrado. Si el proceso se continúa, obtenemos una serie de cuadrados inscritos cada uno en el anterior, tal como indica la figura. Se pide:

- a) Hallar la función $A(n)$ que permite calcular el área del enésimo cuadrado de la serie.
 b) Si el primer cuadrado tiene 1 m² de área, ¿cuál es el primer cuadrado cuya área es inferior a 1 cm²?



SOLUCIONES

1. a) $f(3) < 1 \rightarrow k^3 < 1 \rightarrow k < 1$
 b) $f(0,5) > 3 \rightarrow k^{0,5} > 3 \rightarrow k > 9 \rightarrow k > 1$
 c) $f(1) > 2 \rightarrow k^1 > 2 \rightarrow k > 1$
 d) $f(2) < 0 \rightarrow k^2 > 0$, imposible

2. $f(x) = a \cdot b^x \rightarrow \left. \begin{array}{l} f(0) = 2 \\ f(3) = 6,75 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 = a \cdot b^0 \\ 6,75 = a \cdot b^3 \end{array} \}$
 $b = \sqrt[3]{6,75 : 2} = 1,5 \left. \begin{array}{l} a = 2 \\ f(x) = 2 \cdot 1,5^x \end{array} \right\} \rightarrow f(2) = 4,5$
 $g(x) = c \cdot d^x \rightarrow \left. \begin{array}{l} g(-1) = 3 \\ g(1) = 0,75 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3 = c \cdot d^{-1} \\ 0,75 = c \cdot d \end{array} \}$
 $d = \sqrt{0,75 : 3} = 0,5 \left. \begin{array}{l} c = 0,75 : 0,5 = 1,5 \\ g(x) = 1,5 \cdot 0,5^x \end{array} \right\} \rightarrow g(2) = 0,375$

3. a) $8^{-x^2} = \frac{1}{4} \rightarrow 4^{-2x^2} = 4^{-1} \rightarrow -2x^2 = -1 \rightarrow$
 $\rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \rightarrow x_1 \approx -0,7; x_2 \approx 0,7$
 b) $2^{\frac{x+2}{x}} = 2^x \rightarrow \frac{x+2}{x} = x \rightarrow$
 $\rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow x_1 = -1; x_2 = 2$
 c) $8^x = 5^{3-x} \rightarrow 8^x = 5^3 : 5^x \rightarrow 40^x = 5^3 = 125 \rightarrow$
 $\rightarrow x \approx 1,30$ (por tanteo con la calculadora).

4. $\log(11x - 1) = 1 \rightarrow 11x - 1 = 10 \rightarrow x = 1$
 $\log \frac{2x}{x+1} = -2 \rightarrow \frac{2x}{x+1} = 10^{-2} \rightarrow$
 $\rightarrow 200x = x + 1 \rightarrow x = \frac{1}{199}$
 $\log \frac{x^2}{x+6} = 0 \rightarrow \frac{x^2}{x+6} = 10^0 \rightarrow$
 $\rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \rightarrow x_1 = -2; x_2 = 3$

5. Sea $P(t) = a \cdot b^t$ la función de crecimiento, se tiene

$$P(t) = a \cdot b^t \left\{ \begin{array}{l} P(3) = 4000 = a \cdot b^3 \\ P(5) = 8000 = a \cdot b^5 \end{array} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow b^2 = 2 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} b = \sqrt{2} \\ a \approx 1414 \end{array} \right.$$

- a) El número de truchas iniciales es
 $P(0) = a \approx 1414$ truchas
 b) Al principio del sexto año, la función de crecimiento es $P(t) = 2000 \cdot \sqrt{2}^t$.
 Si ha de ser $P(t) = 8000$, se tiene
 $2000 \cdot \sqrt{2}^t = 8000 \rightarrow \sqrt{2}^t = 4 \rightarrow$
 $\rightarrow 2^{\frac{t}{2}} = 2^2 \rightarrow t = 4$ años

6. Sean I_1 el interés que hay que pagar al 12 % anual e I_2 el interés que hay que pagar al 1 % mensual, se tiene:

$$I_1 = 60\,000 \cdot 1,12^{10} - 60\,000 \approx 126\,351 \text{ euros}$$

$$I_2 = 60\,000 \cdot 1,01^{120} - 60\,000 \approx 138\,023 \text{ euros}$$

Es más favorable para el cliente el pago anual, ya que supone un ahorro de $138\,023 - 126\,351 = 11\,672$ euros.

El prestamista pretende ganar más dinero con el mismo desembolso.

7. Sean $\left. \begin{array}{l} \log_a M = m \\ \log_a N = n \end{array} \right\} \begin{array}{l} M = a^m \\ N = a^n \end{array} \}$

$$\left\{ \begin{array}{l} M \cdot N = a^{m+n} \rightarrow \log_a(M \cdot N) = m + n = \log_a M + \log_a N \\ \frac{M}{N} = a^{m-n} \rightarrow \log_a \frac{M}{N} = m - n = \log_a M - \log_a N \\ M^p = a^{p \cdot m} \rightarrow \log_a M^p = p \cdot m = p \cdot \log_a M \end{array} \right.$$

8. Sean $A(t) = 24\,000 \cdot 1,035^t$ y $B(t) = 48\,000 \cdot 1,035^t$ las funciones de crecimiento de cada bosque:

- a) Debe cumplirse

$$A(t) = 48\,000 \rightarrow 24\,000 \cdot 1,035^t = 48\,000 \rightarrow$$

$$\rightarrow 1,035^t = 2 \rightarrow 20 < t < 21, \text{ algo más de } 20 \text{ años.}$$

- b) Debe cumplirse

$$\left. \begin{array}{l} A(t) = 72\,000 = 24\,000 \cdot 1,035^{t_A} \\ B(t) = 144\,000 = 48\,000 \cdot 1,035^{t_B} \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} 1,035^{t_A} = 3 \\ 1,035^{t_B} = 3 \end{array} \right\} t_A = t_B = t, \text{ los mismos años.}$$

9. Sean L_0, L_1, L_2, \dots y $A_0 = L_0^2, A_1 = L_1^2, A_2 = L_2^2, \dots$ la sucesión de lados y áreas de los cuadrados de la serie. Por el teorema de Pitágoras, se tiene
 $L_1^2 = \left(\frac{L_0}{2}\right)^2 + \left(\frac{L_0}{2}\right)^2 \rightarrow A_1 = \frac{1}{2} \cdot A_0$. Como esta relación de áreas se cumple entre cada cuadrado y el precedente, se tiene:

a) $A_n = \frac{1}{2} \cdot A_{n-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot A_{n-2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \dots \frac{1}{2} \cdot A_0$
 Por tanto, $A(n) = A_0 \cdot 0,5^n$.

- b) Se trata de resolver la inecuación $0,5^n < 0,0001$.
 Dando valores a n se tiene $0,5^{14} < 0,0001 < 0,5^{13}$
 $n = 14$. Es el decimocuarto cuadrado inscrito.