18 Técnicas de recuento

1. Calcula el valor de las siguientes expresiones:

a) $4!$ b) P_8 c) $5! - P_4$

2. Simplifica las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{10!}{2! \cdot 5!}$ b) $\dfrac{4!}{7! - 3!}$ c) $\dfrac{(x-4)!}{P_{(x-6)}}$

3. a) ¿De cuantas formas diferentes pueden colocarse en fila 7 personas?

b) ¿Y si la primera y la última son fijas?

4. Calcula y simplifica:

a) $V_{6,2}$ b) $V_{7,4}$ c) $\dfrac{V_{8,5} - V_{8,2}}{V_{5,2}}$

5. Resuelve la siguiente ecuación: $V_{x,5} = 12 \cdot V_{x,3}$

6. Con las letras de la palabra CUERPO, ¿cuántas palabras de cuatro letras distintas, con o sin sentido, se pueden formar? ¿Cuántas empiezan por *p* y terminan por *e*?

7. Al lanzar un dado 3 veces, ¿cuántos resultados distintos podemos obtener?

8. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $VR_{x,2} + 4VR_{x+1,2} = 305$

b) $16VR_{x-1,2} = 9VR_{4,3}$

c) $VR_{6,2} + 15VR_{x-3,2} = 171$

9. a) ¿Cuántos números de 5 cifras, repetidas o no, se pueden formar con los dígitos 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8?

b) ¿Cuántos serán múltiplos de 5?

c) ¿Cuántos tienen el 2 en la posición de las unidades y el 7 en la posición de las centenas?

10. Comprueba las siguientes igualdades:

a) $C_{10,6} = C_{10,4}$

b) $\dbinom{11}{4} = \dbinom{11}{7}$

c) $C_{x,x-3} = \dbinom{x}{3}$

11. Se dispone de 10 botes de pintura de diferentes colores. ¿Cuántas mezclas de tres colores se pueden hacer? ¿Y cuántas mezclas se pueden hacer de siete colores?

12. Un examen consta de 25 preguntas, de las que se deben contestar 20.

a) ¿De cuántas formas diferentes se pueden elegir esas 20 preguntas?

b) ¿Y si 15 de ellas son obligatorias?

SOLUCIONES

1. a) $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

b) $P_8 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40\,320$

c) $5! - P_4 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 - 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 96$

2. a) $\dfrac{10!}{2! \cdot 5!} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{2 \cdot 1 \cdot 5!} = 15\,120$

b) $\dfrac{4!}{7! - 3!} = \dfrac{4 \cdot 3!}{(7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 - 1)3!} = \dfrac{4}{839}$

c) $\dfrac{(x-4)!}{P_{(x-6)}} = \dfrac{(x-4)(x-5)(x-6)!}{(x-6)!} =$

$= (x-4)(x-5) = x^2 - 9x + 20$

3. a) Influye el orden de colocación e intervienen todas las personas en cada ordenación. Se trata de permutaciones de 7 elementos:

$P_7 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5\,040$ formas diferentes.

b) Si la primera y la última son fijas, solo hay que cubrir 5 posiciones, con 5 personas, luego:

$P_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ formas diferentes.

4. a) $V_{6,2} = 6 \cdot 5 = 30$

b) $V_{7,4} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$

c) $\dfrac{V_{8,5} - V_{8,2}}{V_{5,2}} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 - 8 \cdot 7}{5 \cdot 4} =$

$= \dfrac{56(60-1)}{20} = \dfrac{826}{5}$

5. Debe ser: $V_{x,5} = 12 \cdot V_{x,3}$, con $x \geqslant 5$

$x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) =$

$= 12x(x-1)(x-2)$

$(x-3)(x-4) = 12;\ x^2 - 7x + 12 = 12$

$x^2 - 7x = 0;\ x(x-7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 7 \end{cases}$

La solución es $x = 7$, porque $x \geqslant 5$.

6. Influye el orden, y no entran todas las letras en cada palabra, sin poder repetirse ninguna letra. Se trata de variaciones sin repetición.

$V_{6,4} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ palabras distintas.

Que empiecen por *p* y terminen por *e*:

$V_{4,2} = 4 \cdot 3 = 12$

7. En cada lanzamiento hay 6 posibles resultados, puede haber repetición y hay que tener en cuenta el orden:

$VR_{6,3} = 6^3 = 216$ resultados distintos.

8. a) $VR_{x,2} + 4VR_{x+1,2} = 305;\ x^2 + 4(x+1)^2 = 305;$

$5x^2 + 8x + 4 = 305;\ 5x^2 + 8x - 301 = 0;$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 6\,020}}{10} = \begin{cases} x = 7 \\ x = -\dfrac{43}{5} \end{cases}$$

La solución válida es $x = 7$.

b) $16VR_{x-1,2} = 9VR_{4,3};\ 16(x-1)^2 = 9 \cdot 4^3;$
$(x-1)^2 = 6^2$; solución válida, $x = 7$.

c) $VR_{6,2} + 15VR_{x-3,2} = 171;\ 6^2 + 15(x-3)^2 = 171$
$(x-3)^2 = 9$; solución válida, $x = 6$

9. a) $VR_{7,5} = 7^5 = 16\,807$ números distintos.

b) Son múltiplos de 5 solo los que acaban en 5; por tanto, $VR_{6,4} = 6^4 = 1\,296$.

c) Al fijar los dos números en las dos posiciones, nos quedan 5 números para ocupar tres posiciones, por consiguiente: $VR_{5,3} = 5^3 = 125$

10. a) $$\left.\begin{array}{l} C_{10,6} = \dfrac{10!}{(10-6)! \cdot 6!} = \dfrac{10!}{4! \cdot 6!} \\ C_{10,4} = \dfrac{10!}{(10-4)! \cdot 4!} = \dfrac{10!}{6! \cdot 4!} \end{array}\right\} \Rightarrow C_{10,6} = C_{10,4}$$

b) $$\left.\begin{array}{l} \dbinom{11}{4} = \dfrac{11!}{7! \cdot 4!} \\ \dbinom{11}{7} = \dfrac{11!}{4! \cdot 7!} \end{array}\right\} \Rightarrow \binom{11}{4} = \binom{11}{7}$$

c) $$\left.\begin{array}{l} C_{x,x-3} = \dfrac{x!}{[x-(x-3)]! \cdot (x-3)!} = \dfrac{x!}{3! \cdot (x-3)!} \\ \dbinom{x}{3} = \dfrac{x!}{(x-3)! \cdot 3!} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow C_{x,x-3} = \dbinom{x}{3}$

11. Número de mezclas posibles de tres colores:

$C_{10,3} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$

Con siete colores, es: $C_{10,7} = C_{10,3} = 120$

12. a) $C_{25,20} = C_{25,5} = \dfrac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} =$

$= 53\,130$ formas diferentes.

b) Si 15 son fijas, quedan 10 para elegir 5:

$C_{10,5} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 252$ formas diferentes.