

# 18 Técnicas de recuento

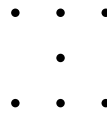
1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a)  $5 \cdot C_{x,3} = 8 \cdot C_{x-1,4}$     b)  $2 \cdot C_{x,4} = 2 \cdot C_{x,3} - C_{x,2}$     c)  $18 \cdot C_{x,2} + 24 \cdot C_{x,3} = 125x$

2. El número de variaciones de cierto número de elementos tomados de cinco en cinco es igual que el de variaciones de los mismos elementos tomados de cuatro en cuatro. Halla el número de elementos.

3. Con los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ¿cuántos números de tres cifras se pueden formar que sean mayores que 200 pero menores que 700?

4. ¿Cuántos triángulos se pueden formar uniendo tres puntos a partir de la siguiente figura?



5. Con las letras de la palabra LIBRO, ¿cuántas palabras, de 5 letras distintas, se pueden formar de modo que las vocales no estén juntas?

6. En una clase hay 12 chicas y 14 chicos.

- a) ¿Cuántos grupos de cuatro personas se pueden formar?
- b) ¿Cuántos si en cada grupo debe haber dos chicas?
- c) ¿Cuántos si en cada grupo debe haber por lo menos dos chicas?

7. Se quieren colocar, en una estantería, 4 libros de matemáticas, 3 de historia y 5 de literatura, de manera que los libros de cada disciplina tienen que permanecer juntos. ¿De cuántas formas se puede hacer?

8. Con 15 consonantes y 3 vocales:

- a) ¿Cuántas palabras de 5 letras distintas, con o sin sentido, se pueden formar?
- b) ¿Cuántas si la letra central tiene que ser consonante?
- c) Si suponemos que cada letra está escrita en una bola e introducimos las bolas en una bolsa, ¿cuántos grupos de cinco letras podemos extraer, en una sola extracción de cinco bolas?

9. A una reunión científica internacional asisten 100 personas de las que 50 hablan inglés solamente, 30 hablan solo francés y las 20 restantes hablan ambos idiomas. ¿Cuántos diálogos pueden establecerse sin intérprete?

10. Resuelve la siguiente ecuación:

$$\frac{x \cdot (x^2 + 6)}{6} = \binom{x}{0} + \binom{x}{1} + \binom{x}{2} + \binom{x}{3}$$

# SOLUCIONES

$$1. a) 5 \cdot C_{x,3} = 8 \cdot C_{x-1,4} \text{ (tiene que ser } x > 4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5 \cdot \frac{x \cdot (x-1) \cdot (x-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} =$$

$$= 8 \cdot \frac{(x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3) \cdot (x-4)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5 \cdot x = 2 \cdot (x-3) \cdot (x-4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 19x + 24 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 8 \left( x = \frac{3}{2} \text{ no es válida} \right)$$

$$b) 2 \cdot C_{x,4} = 2 \cdot C_{x,3} - C_{x,2} \text{ (} x > 3);$$

$$2 \cdot \frac{x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} =$$

$$= 2 \cdot \frac{x \cdot (x-1) \cdot (x-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} - \frac{x \cdot (x-1)}{2 \cdot 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3)}{12} =$$

$$= \frac{4 \cdot x \cdot (x-1) \cdot (x-2) - 6x \cdot (x-1)}{12} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3)}{12} =$$

$$= \frac{x \cdot (x-1) \cdot [4(x-2) - 6]}{12} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-2) \cdot (x-3) = 4 \cdot (x-2) - 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 9x + 20 = 0 \Leftrightarrow x = 5; x = 4$$

$$c) 8 \cdot C_{x,2} + 24 \cdot C_{x,3} = 125x \text{ (} x > 2)$$

$$18 \cdot \frac{x \cdot (x-1)}{2 \cdot 1} + 24 \cdot \frac{x \cdot (x-1) \cdot (x-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 125x$$

$$x \cdot (x-1) + 4x \cdot (x-1) \cdot (x-2) = 125x$$

$$4x^3 - 3x^2 - 126x = 0$$

$$x = 6, \text{ válida; } x = 0, \text{ no válida; } x = -\frac{42}{8}, \text{ no válida.}$$

$$2. V_{n,5} = V_{n,4} \text{ (} n > 4) \Leftrightarrow V_{n,4} \cdot (n-4) = V_{n,4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n-4 = 1, n = 5$$

3. Se trata de variaciones con repetición, ya que importa el orden y las cifras pueden repetirse en un mismo número, pero las condiciones del enunciado hacen que en la posición de las centenas no puedan figurar ni 1 ni 7, por tanto la respuesta es:

$$5 \cdot VR_{7,2} = 5 \cdot 7^2 = 245$$

4. Para formar un triángulo hay que unir tres puntos no alineados, no importando el orden. Se trata de combinaciones. El número de triángulos es:

$$C_{7,3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 5 = 30$$

ternas de puntos alineados

5. Para que las vocales no estén juntas, se tiene que dar alguna de las siguientes configuraciones:

V \_ V \_ \_ | \_ V \_ V \_ | \_ \_ V \_ V | V \_ \_ V \_ | \_ V \_ \_ V | V \_ \_ \_ V

Para cada configuración tenemos:  $P_2 \cdot P_3 = 12$  palabras. En total hay:  $6 \cdot 12 = 72$  palabras.

6. En todos los casos, un grupo no varía al variar el orden. Se trata de combinaciones.

$$a) C_{26,4} = \frac{26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 14\,950 \text{ grupos distintos.}$$

$$b) C_{12,2} \cdot C_{14,2} = \frac{12 \cdot 11}{2 \cdot 1} \cdot \frac{14 \cdot 13}{2 \cdot 1} = 66 \cdot 91 = 6\,006 \text{ grupos distintos.}$$

c) Si por lo menos tiene que haber 2 chicas, entonces puede haber 2, 3 ó 4, por tanto:

$$\underbrace{C_{12,2} \cdot C_{14,2}}_{\text{dos chicas}} + \underbrace{14 \cdot C_{12,3}}_{\text{tres chicas}} + \underbrace{C_{12,4}}_{\text{cuatro chicas}} =$$

$$= 6\,006 + 3\,080 + 495 =$$

$$= 13\,571 \text{ grupos distintos}$$

7. Ordenaciones de libros de matemáticas:  $P_4 = 24$

Ordenaciones de libros de historia:  $P_3 = 6$

Ordenaciones de libros de literatura:  $P_5 = 120$

Ordenaciones de los tres bloques:  $P_3 = 6$

Por tanto el número total de ordenaciones de todos los libros en la estantería es:

$$P_3 \cdot P_4 \cdot P_3 \cdot P_5 = 6 \cdot 24 \cdot 6 \cdot 120 = 103\,680$$

8. a) Las palabras son distintas si se altera el orden de las letras. Se trata de variaciones:

$$V_{18,5} = 1\,028\,160$$

b) Las palabras son distintas si se altera el orden de las letras. Se trata de variaciones:

$$15 \cdot V_{17,4} = 856\,800$$

c) No influye el orden. Se trata de combinaciones:

$$C_{18,5} = 8\,568$$

9. Diálogos entre los que solo hablan inglés:

$$C_{50,2} = 1\,225$$

Diálogos entre los que solo hablan francés:

$$C_{30,2} = 435$$

Diálogos entre los que hablan los dos idiomas:

$$C_{20,2} = 190$$

Diálogos entre los que solo hablan un idioma y los bilingües:

$$80 \cdot 20 = 1\,600$$

Total:

$$1\,225 + 435 + 190 + 1\,600 = 3\,450 \text{ diálogos}$$

$$10. \frac{x \cdot (x^2 + 6)}{6} = \binom{x}{0} + \binom{x}{1} + \binom{x}{2} + \binom{x}{3}$$

$$\frac{x \cdot (x^2 + 6)}{6} = 1 + x + \frac{x(x-1)}{2} + \frac{x(x-1)(x-2)}{6}$$

$$\frac{x^3 + 6x}{6} = \frac{6 + 6x + 3x^2 - 3x + x^3 - 3x^2 + 2x}{6}$$

$$0 = 6 - x; x = 6.$$