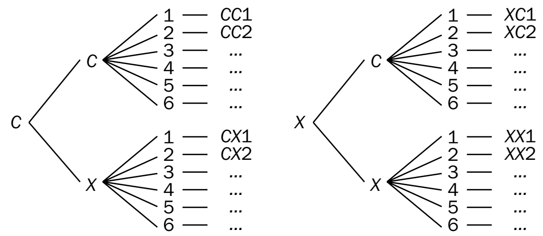
18 Técnicas de recuento

CRITERIOS	ACTIVIDADES
A. Hacer recuento de tareas sucesivas aplicando el principio de multiplicación.	1. Se lanzan dos monedas y un dado. a) Forma el diagrama en árbol con todas las posibilidades. b) ¿Cuántos resultados se obtienen? 2. Un chico tiene 6 camisas, 4 pantalones y 3 pares de zapatos. ¿De cuántas maneras diferentes puede vestirse con camisa, pantalón y zapatos? 3. Una factoría de automóviles fabrica 3 modelos distintos de coches, con 4 colores diferentes y 2 tipos distintos de acabado interior. ¿Cuántas variedades de coches produce la fábrica?
B. Plantear y resolver problemas en los que sea necesario utilizar permutaciones y calcular su número.	4. Escribe las permutaciones de los números 1, 2 y 3. 5. ¿De cuántas maneras distintas pueden entrar 8 atletas en la meta? 6. ¿De cuántas maneras pueden colocarse en fila 4 libros de Matemáticas, 3 de Química y 2 de Literatura, sin separar los de la misma materia?
C. Plantear y resolver problemas en los que sea necesario utilizar variaciones ordinarias y con repetición y calcular su número.	7. Con ayuda de un diagrama en árbol, escribe las variaciones de las vocales tomadas dos a dos. 8. a) ¿Cuántos números distintos, de cuatro cifras cada uno, pueden formarse con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5 y 6? Indica el mayor y el menor. b) ¿Y si no se pueden repetir cifras? Indica también en este caso el menor y el mayor. 9. En una clase de 24 alumnos se hacen elecciones para elegir delegado, subdelegado y secretario. ¿Entre cuántas ternas posibles se puede elegir? (Indicación: piensa si esos cargos son intercambiables.)
D. Plantear y resolver problemas en los que sea necesario utilizar combinaciones sin repetición y calcular su número.	10. Tenemos siete botes de pintura de distinto color. ¿Cuántos nuevos colores podemos obtener mezclando la pintura de tres botes en la misma proporción? 11. ¿Cuántos triángulos pueden formarse con 10 puntos no alineados en grupos de 3 o más puntos? 12. El profesor de Literatura pide leer 3 libros de una lista de 8. ¿Cuántos grupos de libros diferentes pueden leerse?
E. Operar con números factoriales y con números combinatorios.	13. Calcula: a) $7 \cdot 6!$ b) $\frac{7!}{6!}$ c) $\frac{9!}{6!}$ 14. Calcula el valor de los siguientes números combinatorios: a) $\binom{15}{4}$ b) $\binom{6}{4}$ c) $\binom{5}{5}$ d) $\binom{8}{0}$
F. Resolver ecuaciones algebraicas en las que intervengan variaciones, combinaciones y permutaciones.	15. Resuelve las ecuaciones: a) $V_{n,2} = 132$ b) $P_n = 40\,320$ 16. Resuelve las ecuaciones: a) $V_{n,4} = 18 \cdot C_{n,3}$ b) $20 \cdot V_{n,4} = V_{n,6}$

SOLUCIONES

1. a)



b) 2 (1.ª moneda) · 2 (2.ª moneda) · 6 (dado) = 24

2. 6 (camisas) · 4 (pantalones) · 3 (zapatos) = 72

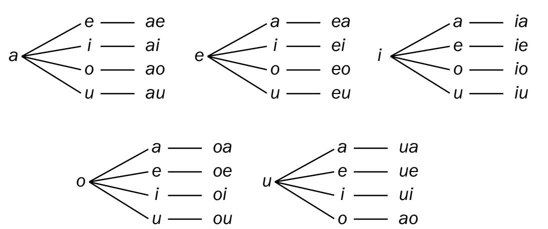
3. 3 (modelos) · 4 (colores) · 2 (acabados) = 24

4. 123 132 213 231 312 321

5. De P_8 maneras distintas. $P_8 = 8! = 40\,320$

6. P_3 (situación de materias) · P_4 (Matemáticas) · · P_3 (Química) · 2 (Literatura) = 6 · 24 · 6 · 2 = = 1 728.

7.



En total, 5 · 4 = 20 grupos de dos vocales.

8. a) Son variaciones con repetición. Su número es: $VR_{6,4} = 6^4 = 1\,296$.

Menor: 1 111. Mayor: 6 666.

b) Son variaciones sin repetición. Su número es: $V_{6,4} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$.

Menor: 1 234. Mayor: 6 543.

9. Los cargos no son intercambiables; no es lo mismo ser delegado que subdelegado, por ejemplo. Luego influye el orden en la elección. Por tanto, se trata de un problema de variaciones de 24 alumnos tomados de 3 en 3: $V_{24,3} = 24 \cdot 23 \cdot 22 = 12\,144$.

10. Da igual el orden; por tanto, es un problema de combinaciones:

$$C_{7,3} = \binom{7}{3} = \frac{7!}{3! \cdot (7-3)!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4!} = 35$$

11. Tres puntos, en cualquier orden que se den, determinan el mismo triángulo, es pues un problema de combinaciones:

$$C_{10,3} = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 7!} = 120$$

12. La terna *ABC* es la misma que la *ACB*, por ejemplo. Por tanto, es un problema de combinaciones. El número es:

$$C_{8,3} = \binom{8}{3} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5!} = 56$$

13. a) $7 \cdot 6! = 5\,040$;

b) $\frac{7!}{6!} = \frac{7 \cdot 6!}{6!} = 7$

c) $\frac{9!}{6!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6!} = 504$

14. a) $\binom{15}{4} = \frac{15!}{4! \cdot (15-4)!} = 1\,365$

b) $\binom{6}{4} = \frac{6!}{4! \cdot (6-4)!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 2!} = 3 \cdot 5 = 15$

c) $\binom{5}{5} = \frac{5!}{5! \cdot (5-5)!} = \frac{5!}{5! \cdot 0!} = \frac{1}{1} = 1$

d) $\binom{8}{0} = \frac{8!}{0! \cdot (8-0)!} = \frac{8!}{0! \cdot 8!} = 1$

15. a) $V_{n,2} = n \cdot (n-1) \Rightarrow n \cdot (n-1) = 132 \Rightarrow$ $\Rightarrow n^2 - n - 132 = 0 \Rightarrow n = 12$. (La solución $n = -11$ no puede tenerse en cuenta.)

b) $P_n = 40\,320 \Rightarrow$

$\Rightarrow n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40\,320$

Simplificando la ecuación anterior por 2:

$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 4 \cdot 3 = 20\,160$

Simplificando la ecuación anterior por 3:

$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 5 \cdot 4 = 6\,720$

Hay que seguir dividiendo, sucesivamente, por 4, 5, 6, 7, ... hasta que salga 1

Así: $6\,720 : 4 = 1\,680 \longrightarrow 1\,680 : 5 = 336 \longrightarrow$ $\longrightarrow 336 : 6 = 56 \longrightarrow 56 : 7 = 8 \longrightarrow 8 : 8 = 1$

El valor de n es 8 $\longrightarrow$

$\longrightarrow P_8 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40\,320$

16. a) $n(n-1)(n-2)(n-3) = 18 \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \Rightarrow$

$\Rightarrow n - 3 = 3 \Rightarrow n = 6$

b) $20 \cdot n(n-1)(n-2)(n-3) =$

$= n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5) \Rightarrow$

$\Rightarrow n^2 - 9n = 0 \Rightarrow n = 0,\ n = 9$

La solución válida es $n = 9$.