# 18 Técnicas de recuento

**1.** En una fiesta coinciden 6 chicos y 7 chicas; si bailan todos con todas, ¿cuántas parejas distintas se han formado?

**2.** Si permutamos las letras de la palabra PIANO, ¿cuántas de esas permutaciones acaban en vocal?

**3.** Averigua de cuántas maneras diferentes pueden escribirse las letras de las palabras:

a) FLOR b) ROSA c) CLAVEL

En los tres casos, escribe la primera y la última en orden alfabético.

**4.** Calcula:

a) $\dfrac{(15-3)!}{(12-2)!}$ b) $4! \cdot 3!$ c) $\dfrac{100!}{97!}$

**5.** Calcula: a) $6! \cdot \dfrac{3!}{8!}$; b) $\dfrac{12!}{8! \cdot 4!}$

**6.** a) ¿Cuántos códigos de 4 letras pueden formarse sin repetir ninguna de las 26 letras del abecedario?

b) ¿Cuántos de estos códigos tienen exactamente una vocal?

**7.** En la Liga Nacional de Fútbol hay 20 equipos en primera división. ¿Cuántos partidos se juegan en cada liga? (Recuerda que cada equipo juega contra los demás dos partidos, uno en casa y otro fuera.)

**8.** ¿Cuántos números capicúas hay de 6 cifras?

**9.** ¿Cuántos números positivos y menores que 1 000 pueden formarse con los dígitos 0, 2, 4, 6 y 8?

**10.** Comprueba que: a) $\dbinom{12}{3} = \dbinom{12}{9}$; b) $\dbinom{15}{4} + \dbinom{15}{5} = \dbinom{16}{5}$

**11.** ¿Cuántas apuestas distintas pueden hacerse en la lotería primitiva?

**12.** ¿Cuántas diagonales tiene un decágono?

**13.** ¿Cuántos grupos de 4 cartas pueden formarse con una baraja española?

**14.** Resuelve la ecuación $P_n = 132 \cdot P_{n-2}$

**15.** Resuelve la ecuación: $\dbinom{m}{5} = 2\dbinom{m}{4}$

# SOLUCIONES

**1.** Aplicando el principio de multiplicación, $6 \cdot 7 = 42$ parejas.

**2.** El número de permutaciones es $P_5 = 5! = 120$.

Como hay 5 terminaciones posibles, cada una de las letras será última en 24 de esas permutaciones. Por tanto, habrá $3 \cdot 24 = 72$ permutaciones que terminen en vocal.

**3.** a) $P_4 = 4! = 24$. FLOR y ROLF.

b) $P_4 = 4! = 24$. AORS y RSOA.

c) Observa que la L está dos veces y cada vez que se intercambia L por L no cambia nada. Así, la permutación CLAVE*L* = C*L*AVEL, y L*L*AVEC = = *L*LAVEC; en ambos casos hemos escrito en cursiva una de las L, pero en realidad no es así. Por tanto, cada dos permutaciones son una palabra distinta de 6 letras. Su número será:

$$\frac{P_6}{2} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2} = 360.$$

**4.** a) 132; b) 144; c) 970 200

**5.** a) $\frac{3}{28}$; b) 495

**6.** a) Es un problema de variaciones sin repetición:

$V_{26,4} = 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 = 358\,800$.

b) En cada grupo de 4 letras habrá una vocal y 3 consonantes. La vocal puede ocupar las 4 posiciones posibles. Las 21 consonantes tendrán que situarse, tomadas de 3 en 3, en las tres posiciones libres restantes.

En total se tendrá:

5 (vocales) · 4 (posiciones que puede tomar cada vocal) · $V_{21,3} = 5 \cdot 4 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19 = 159\,600$.

**7.** Aquí importa el orden, pues no es lo mismo jugar en casa que fuera. Por tanto, se trata de un problema de variaciones de 20 equipos tomados 2 a 2. Su número será $V_{20,2} = 20 \cdot 19 = 380$.

**8.** Son números de la forma *abccba*: Por ejemplo, 805 508.

Observa que fijadas las tres primeras cifras, solo hay una posibilidad para las otras tres. Por consiguiente, hay tantos capicúas como números de tres cifras: 1 000. O lo que es lo mismo: $VR_{10,3}$.

**9.** Algunos de esos números son: 240, 222, 008, ... Esto es, números de tres cifras (para que sean menores que 1 000), y pueden repetirse. Por tanto, es un problema de variaciones con repetición de 5 dígitos tomados de 3 en 3: $VR_{5,3} = 53 = 125$.

**10.** a) $\binom{12}{3} = 220$; $\binom{12}{9} = 220$

b) $\binom{15}{4} + \binom{15}{5} = 4\,368$ $\binom{16}{5} = 4\,368$.

**11.** En la lotería primitiva intervienen 49 bolas, numeradas del 1 al 49. Cada apuesta consta de 6 números distintos, que pueden escogerse en cualquier orden sin que cambie la apuesta. Por tanto, se trata de un problema de combinaciones de 49 elementos tomados de 6 en 6.

Su número es:

$$C_{49,6} = \binom{49}{6} = 13\,983\,816$$

**12.** Desde cada uno de los 10 vértices pueden trazarse 7 diagonales. (Un vértice no genera diagonal ni con sí mismo ni con los vértices adyacentes.) Por tanto, inicialmente se podrían trazar $10 \cdot 7 = 70$ diagonales, pero como la diagonal, pongamos *AD*, es la misma que la *DA*, habrá que dividir 70 entre 2. Así pues, el número de diagonales de un decágono es 35.

**13.** Recibidas 4 cartas, lo que importa son las cartas en sí, no el orden en el que vienen dadas. Así, por ejemplo, la baza «as de bastos, 7 de copas, sota de oros y 3 de espadas» es igual a la baza «7 de copas, as de bastos, 3 de espadas y sota de oros». Por tanto, se trata de un problema de combinaciones.

El número de bazas, de grupos, será:

$$C_{40,4} = \binom{40}{4} = \frac{40!}{4! \cdot 36!} = \frac{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 93\,860$$

**14.** $n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = 132 \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \Rightarrow \Rightarrow n(n-1) = 132 \Rightarrow n^2 - n - 132 = 0$.

Resolviendo la última ecuación se tiene $n = 12$. (La solución $n = -11$ no es válida.)

**15.** $\binom{m}{5} = 2\binom{m}{4} \Rightarrow m = 14$