

16 Técnicas de recuento

1. Permutaciones con repetición.
 - a) Supón que tienes que escribir todos los números de seis cifras y que constan exactamente de cuatro doses y dos unos. ¿Cuántos puedes formar?
 - b) ¿De cuántas maneras pueden salir seis caras y cuatro cruces al lanzar diez monedas al aire?
 - c) ¿De cuántas formas puedes reordenar el número 11223 variando solo el orden de las cifras?
 Todos estos casos son ejemplos de permutaciones con repetición. Si tenemos un conjunto de m elementos de los cuales n_1 son de una clase, n_2 de otra, ... y n_h de otra (esto es, $n_1 + n_2 + \dots + n_h = m$), llamamos permutaciones con repetición de los m elementos con índices de repetición n_1, n_2, \dots, n_h a los distintos grupos que se pueden formar con n_1 elementos de la primera clase, n_2 de la segunda, ... y n_h de la última, de tal forma que dos grupos son diferentes si difieren en la ordenación de dichos elementos.
 - d) Escribe una fórmula que dé el número de permutaciones con repetición.
2. Aplicando lo que has aprendido en la anterior actividad, resuelve el siguiente problema: ¿Cuántas quinielas diferentes se deben rellenar para estar seguros de acertar los quince resultados si, no se sabe por qué causa, conocemos previamente que se van a producir 7 unos, 6 equis y 2 doses?
3. a) Simplifica la siguiente expresión en la que intervienen números factoriales: $\frac{(n+2)!(n+3)}{(n+1)! + (n+2)!}$
 b) Comprueba la siguiente igualdad: $4 V_{n,3} + V_{n,4} = P_4 \cdot C_{n+1,4}$
4. Resuelve esta ecuación: $\frac{(n+1)! - 22(n-1)!}{n!} = 10$
5. Consideremos todos los números diferentes que se pueden formar con las cifras 1, 3, 5 y 7 de tal forma que estén todas ellas y ninguna se repita.
 - a) ¿Cuántos números diferentes hay?
 - b) ¿Cuántos de ellos acaban en 1? ¿Cuántos en 3? ¿Cuántos en 5? ¿Y en 7?
 - c) ¿Cuánto suman las unidades de todos los números formados? ¿Y las decenas? ¿Y las centenas? ¿Y las unidades de millar?
 - d) ¿Cuánto suman todos los números formados?
6. Calcula cuántos modelos de billete de tren se pueden imprimir para un trayecto ferroviario con 8 estaciones si:
 - a) En el billete consta solo entre qué estaciones viaja el pasajero, sin especificar cuál es la ciudad de origen y cuál la de destino del viajero.
 - b) En el billete figura primero la ciudad de salida, y en segundo lugar la de llegada.
7. El resultado de un partido de fútbol fue 3 a 2 a favor del equipo local. ¿De cuántas formas pudo llegarse a este resultado según el orden en que se fueron marcando los goles?
8. Resuelve la ecuación $V_{x,3} = 24C_{x-2,2}$.
9. Simplifica la expresión $\frac{(n-1)!(n+m)!}{n!(n+m-1)!}$.
10. Dispones de una moneda de 2 euros, una de 1 euro, una de 50 céntimos, una de 20 céntimos y una de 10 céntimos.
 - a) ¿Cuál es la mayor cantidad de dinero que le puedes dar a tu hermano si le das solo 3 monedas? ¿Cuál es la menor?
 - b) ¿Cuántas cantidades distintas puedes formar usando solo 3 monedas?

SOLUCIONES

1. a) De los seis espacios disponibles para las cifras, se deben escoger dos para ubicar los unos. Por tanto:

$$C_{6,2} = \frac{V_{6,2}}{P_2} = 15$$

b) $C_{10,4} = 210$

c) $C_{5,2} \cdot C_{3,2} = 10 \cdot 3 = 30$

d) $P_m^{n_1, n_2, \dots, n_h} = \frac{m!}{n_1! n_2! \dots n_h!}$

2. $P_{15}^{7,6,2} = \frac{15!}{7! 6! 2!} = 180 180$

3. a)
$$\frac{(n+2)!(n+3)}{(n+1)! + (n+2)!} =$$
$$= \frac{(n+1)!(n+2)(n+3)}{(n+1)! + (n+1)!(n+2)} =$$
$$= \frac{(n+1)!(n+2)(n+3)}{(n+1)!(1+n+2)} = n+2$$

b) $4 V_{n,3} + V_{n,4} = 4n(n-1)(n-2) + n(n-1)(n-2)(n-3) =$
$$= n(n-1)(n-2)(4+n-3)$$
$$P_4 \cdot C_{n+1,4} = 24 \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{24} =$$
$$= (n+1)n(n-1)(n-2)$$

4.
$$\frac{(n+1)! - 22(n-1)!}{n!} = 10$$

$$(n+1)n - 22 = 10n$$

$$n^2 - 9n - 22 = 0$$

$$n = 11 \quad (n = -2 \text{ no tiene sentido})$$

5. a) $P_4 = 24$
b) 6 acaban en 1; 6 acaban en 3; 6 acaban en 5; 6 acaban en 7.

c) La suma de las unidades será:

$$6(1 + 3 + 5 + 7) = 6 \cdot 16 = 96$$

Por otra parte, será la misma que la de las decenas, las centenas y las unidades de millar.

d) $96(1 + 10 + 100 + 1000) = 96 \cdot 1111 = 106 656$

-
6. Cada dos estaciones diferentes generan un tipo de billete, sin importar el orden en que se colocan los nombres de las ciudades, luego hay:

$$C_{8,2} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28 \text{ modelos de billete}$$

En este caso sí importa el orden en que se colocan las ciudades de salida y de llegada, luego hay $V_{8,2} = 8 \cdot 7 = 56$ modelos de billete.

-
7. El primer gol lo puede haber metido el equipo de casa o el visitante, el segundo igual, y así sucesivamente. Luego los goles se pudieron marcar de $VR_{2,5} = 2^5 = 32$ maneras.

8. $V_{x,3} = 24 C_{x-2,2}$
$$x(x-1)(x-2) = \frac{24(x-2)(x-3)}{2}$$
$$x(x-1) = 12(x-3)$$
$$x^2 - 13x + 36 = 0$$
$$x = 9, x = 4$$

9.
$$\frac{(n-1)!(n+m)!}{n!(n+m-1)!} =$$
$$= \frac{(n-1)!(n+m) \cdot (n+m-1)!}{n(n-1)!(n+m-1)!} = \frac{n+m}{n}$$

-
10. a) 3,50 euros; 80 céntimos.

b) $C_{6,3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$ cantidades