2 Potencias y raíces de números reales

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2^{x+1} - 3 \cdot 2^x + 2^{x-1} = -2$

b) $\begin{cases} 2^x + 2^y = 6 \\ 2^x - 2^y = 2 \end{cases}$

2. Sin hacer uso de la calculadora, coloca en orden creciente los siguientes números reales expresados en forma radical razonando tu respuesta:

$$A = \sqrt{5};\ B = \sqrt[3]{10} \text{ y } C = \sqrt[4]{20}$$

Halla, utilizando tu calculadora, los valores aproximados de esos radicales con dos decimales y comprueba la validez de la ordenación realizada.

3. Sabemos que dos números iguales tienen iguales cuadrados. Aplica este criterio y las igualdades notables del álgebra: $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ y $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$ para probar que las siguientes parejas de números reales son iguales:

a) $A = \sqrt{3{,}2}$ y $B = \sqrt{5} - \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

b) $A = \sqrt{5{,}\overline{3}}$ y $B = \sqrt{3} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

4. Opera y simplifica las siguientes expresiones radicales y expresa los resultados en forma de radical único y como una potencia de x de exponente fraccionario:

$$A = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} \qquad B = \sqrt[3]{x\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x\sqrt{x}} \qquad C = \frac{\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt{\sqrt{x}}}{\sqrt{x\sqrt[3]{x}}}$$

5. Opera y simplifica todo lo posible las siguientes expresiones:

$A = (5 - 2\sqrt{3})(5 + 2\sqrt{3}) - (2\sqrt{2} - 1)(2\sqrt{2} + 1)$ y $B = \sqrt{2}(1 - \sqrt{2}) - 3(2 - \sqrt{2}) + (\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)$

6. Sabiendo que la luz recorre 300 000 kilómetros cada segundo, expresa en notación científica los resultados de las siguientes cuestiones:

a) La distancia en kilómetros a la galaxia Alfa Centauri, distante unos 4 años luz.

b) El número de años que tardaría una nave en llegar a esa galaxia a una velocidad de 50 000 km/h.

7. Se considera la expresión $E(x) = \dfrac{x}{1 + x + x^2}$ y se sustituye x por los radicales $\sqrt{m}$ y $\dfrac{1}{\sqrt{m}}$, siendo m un número natural cualquiera, para obtener los radicales $E(\sqrt{m})$ y $E\left(\dfrac{1}{\sqrt{m}}\right)$. Prueba que son iguales los radicales $E(\sqrt{m})$ y $E\left(\dfrac{1}{\sqrt{m}}\right)$.

8. Extrae factores del radical y simplifica las siguientes expresiones:

$$A = \frac{2\sqrt{27} + 5\sqrt{75}}{4\sqrt{108} - 2\sqrt{48}} \qquad B = \frac{\dfrac{\sqrt{8}}{3} + \dfrac{\sqrt{50}}{4}}{\dfrac{4\sqrt{72}}{3}}$$

9. Como sabes, dos números x e y son inversos respecto de la operación de multiplicar si su producto es igual a la unidad. Considera los números dados mediante los radicales $x = \sqrt{12 + k\sqrt{3}}$ e $y = \sqrt{12 - k\sqrt{3}}$ siendo k un número natural. Multiplícalos y a la vista del resultado averigua:

a) Si existen valores enteros de k para los que el producto de x e y sea entero (utiliza, para ello, el método de ensayo y error).

b) ¿Hay valores enteros de k para los que los números x e y sean inversos multiplicativos?

SOLUCIONES

1. a) Factorizamos $2^{x-1}(2^2 - 3 \cdot 2 + 1) = -2 \longrightarrow$
$\longrightarrow -2^{x-1} = -2^1 \longrightarrow x - 1 = 1 \longrightarrow x = 2$

b) Sumamos ecuaciones $\left\{\begin{array}{l} 2^x + 2^y = 6 \\ 2^x - 2^y = 2 \end{array}\right\} \longrightarrow$
$\longrightarrow 2 \cdot 2^x = 8 \longrightarrow 2^x = 4 \longrightarrow$
$\longrightarrow x = 2 \xrightarrow[4 \, + \, 2^y \, = \, 6]{2^2 \, + \, 2^y \, = \, 6} 2^y = 2 \longrightarrow y = 1$

---

2. Reducimos a índice común: mcm (2, 3, 4) = 12. Se tiene:

$A = \sqrt{5} = \sqrt[12]{5^6} = \sqrt[12]{15\,625}$;
$B = \sqrt[3]{10} = \sqrt[12]{10^4} = \sqrt[12]{10\,000}$ y
$C = \sqrt[4]{20} = \sqrt[12]{20^3} = \sqrt[12]{8\,000} \longrightarrow C < B < A$

$A = \sqrt{5} \approx 2{,}24$; $B = \sqrt[3]{10} \approx 2{,}15$ y $C = \sqrt[4]{20} \approx 2{,}11$ el orden es, por tanto, $C < B < A$

---

3. a) $A^2 = 3{,}2$ y $B^2 = \left(\sqrt{5} - \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 =$

$= \sqrt{5^2} + \dfrac{1}{\sqrt{5^2}} - 2 \cdot \sqrt{5} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{5}} = 5 + \dfrac{1}{5} - 2 =$

$= \dfrac{16}{5} = 3{,}2 = A^2$. Son iguales.

b) $A^2 = 5{,}\widehat{3} = \dfrac{53 - 5}{9} = \dfrac{16}{3}$ y

$B^2 = \left(\sqrt{3} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 =$

$= \sqrt{3^2} + \dfrac{1}{\sqrt{3^2}} + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3}} = 3 + \dfrac{1}{3} + 2 =$

$= \dfrac{16}{3}$. Son iguales.

---

4. $A = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} = \left(x\left(xx^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{8}} \cdot x^{\frac{1}{4}} \cdot x^{\frac{1}{2}} =$
$= x^{\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}} = x^{\frac{1+2+4}{8}} = x^{\frac{7}{8}} = \sqrt[8]{x^7}$

$B = \sqrt[3]{x\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x\sqrt{x}} = \left(xx^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(xx^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} =$
$= x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{1}{6}} \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{4}} = x^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} = x^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{x^5} = x\sqrt[4]{x}$

$C = \dfrac{\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt{\sqrt{x}}}{\sqrt{x\sqrt[3]{x}}} = \dfrac{x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{1}{4}}}{\left(xx^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{6}}} =$
$= x^{\frac{2}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}} = x^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{x}$

---

5. $A = (5 - 2\sqrt{3})(5 + 2\sqrt{3}) - (2\sqrt{2} - 1)(2\sqrt{2} + 1) =$
$= 5^2 - 2^2\sqrt{3^2} - (2^2\sqrt{2^2} - 1^2) =$
$= 25 - 12 - (8 - 1) = 6$

$B = \sqrt{2}(1 - \sqrt{2}) - 3(2 - \sqrt{2}) + (\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1) =$
$= \sqrt{2} - \sqrt{2^2} - 6 + 3\sqrt{2} + \sqrt{2^2} - 1 = 4\sqrt{2} - 7$

---

6. a) $4 \text{ años} \cdot 365 \dfrac{\text{días}}{\text{año}} \cdot 24 \dfrac{\text{horas}}{\text{día}} \cdot 60 \dfrac{\text{minutos}}{\text{hora}} \cdot$
$\cdot\, 60 \dfrac{\text{segundos}}{\text{minuto}} \cdot 300\,000 \dfrac{\text{km}}{\text{segundo}} \approx$
$\approx 3{,}78 \cdot 10^{13}$ kilómetros

b) $t = \dfrac{3{,}78 \cdot 10^{13}}{5 \cdot 10^4} = 7{,}56 \cdot 10^8$ horas $=$
$= 7{,}56 \cdot 10^8 \text{ horas} \cdot \dfrac{1 \text{ día}}{24 \text{ horas}} \cdot \dfrac{1 \text{ año}}{365 \text{ días}} \approx$
$\approx 8{,}63 \cdot 10^5$, unos 86 300 años.

---

7. $E\left(\dfrac{1}{\sqrt{m}}\right) = \dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{m}}}{1 + \dfrac{1}{\sqrt{m}} + \dfrac{1}{m}} = \dfrac{1}{\sqrt{m}\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{m}} + \dfrac{1}{m}\right)} =$

$= \dfrac{1}{\sqrt{m} + 1 + \dfrac{\sqrt{m}}{m}} = \dfrac{1}{\sqrt{m} + 1 + \dfrac{1}{\sqrt{m}}} =$

$= \dfrac{1}{\dfrac{m + \sqrt{m} + 1}{\sqrt{m}}} = \dfrac{\sqrt{m}}{m + \sqrt{m} + 1}$

Por otra parte, se tiene: $E(\sqrt{m}) = \dfrac{\sqrt{m}}{1 + \sqrt{m} + m}$ y consecuentemente son iguales.

---

8. $A = \dfrac{2\sqrt{27} + 5\sqrt{75}}{4\sqrt{108} - 2\sqrt{48}} = \dfrac{2\sqrt{3^3} + 5\sqrt{3 \cdot 5^2}}{4\sqrt{2^2 \cdot 3^3} - 2\sqrt{2^4 \cdot 3}} =$

$= \dfrac{2 \cdot 3\sqrt{3} + 5 \cdot 5\sqrt{3}}{4 \cdot 2 \cdot 3\sqrt{3} - 2 \cdot 2^2\sqrt{3}} = \dfrac{31\sqrt{3}}{16\sqrt{3}} = \dfrac{31}{16}$

$B = \dfrac{\dfrac{\sqrt{8}}{3} + \dfrac{\sqrt{50}}{4}}{\dfrac{4\sqrt{72}}{3}} = \dfrac{\dfrac{\sqrt{2^3}}{3} + \dfrac{\sqrt{2 \cdot 5^2}}{4}}{\dfrac{4\sqrt{2^3 \cdot 3^2}}{3}} =$

$= \dfrac{\sqrt{2}\left(\dfrac{2}{3} + \dfrac{5}{4}\right)}{8\sqrt{2}} = \dfrac{\dfrac{8 + 15}{12}}{8} = \dfrac{23}{96}$

---

9. a) El producto es
$x \cdot y = \sqrt{12 + k\sqrt{3}} \cdot \sqrt{12 - k\sqrt{3}} =$
$= \sqrt{(12 + k\sqrt{3})(12 - k\sqrt{3})} = \sqrt{12^2 - 3k^2} =$
$= \sqrt{144 - 3k^2}$.

Para que el producto sea entero, la expresión $144 - 3k^2$ ha de ser un cuadrado perfecto. Probamos soluciones de la ecuación $144 - 3k^2 = n^2$ para $k = 1, 2, 3, \ldots$ El número adecuado es 6 ya que: $144 - 3 \cdot 6^2 = 36 = 6^2$. No hay más soluciones pues para $k \geqslant 7$ resulta un radicando negativo.

b) Los números x e y no pueden ser inversos ya que si $x \cdot y = 1 \longrightarrow 144 - 3k^2 = 1 \longrightarrow$
$\longrightarrow k^2 = \dfrac{143}{3}$ no es entero.