2 Potencias y raíces de números reales

1. Dado el número $N = \dfrac{6^{-3} \cdot 10^{-4} \cdot 15^{3}}{24^{7} \cdot 8^{-14} \cdot 48^{3}}$, expresa el número N de las siguientes formas:

a) Como un producto de potencias de 2, 3 y 5 de exponentes enteros.

b) Como una fracción cuyos términos sean potencias de 2, 3 y 5 de exponentes positivos.

2. Expresa en notación científica las siguientes magnitudes:

a) Diez millones de kilómetros en centímetros.

b) 35 decímetros cuadrados en kilómetros cuadrados.

c) 150 miligramos en toneladas.

d) 250 litros en milímetros cúbicos.

3. Escribe los números que resultan de efectuar las operaciones que los definen de dos formas: como producto de potencias de números primos de exponentes fraccionarios y como un solo radical:

$$A = \sqrt{2} \cdot 6^{\frac{1}{3}} \qquad B = \frac{\sqrt[3]{12}}{3 \cdot \sqrt{2}} \qquad C = \frac{2^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{-2}}{\sqrt{6}}$$

4. Calcula el valor de x para que se verifiquen las siguientes igualdades:

a) $\sqrt[3]{\dfrac{2x + 6}{5}} = 2$ b) $\sqrt[4]{x - 1} = \sqrt{5}$ c) $3^{x+1} = \sqrt[3]{9}$ d) $3x = \sqrt[5]{27}$

5. De los siguientes pares de números reales, indica cuál es el mayor de los dos:

a) $A = \sqrt[3]{3}$ y $B = \sqrt{2}$ b) $A = 6^{\frac{2}{3}}$ y $B = \sqrt{12}$ c) $A = 8^{\frac{2}{3}}$ y $B = 2 \cdot \sqrt[6]{32}$

6. Opera y simplifica las siguientes expresiones:

a) $2\sqrt{6} - \sqrt{24} + 3\sqrt{54}$ b) $2\sqrt{27} - 3\sqrt{12} + \sqrt{48}$ c) $3\sqrt{80} + 10\sqrt{180} - 2\sqrt{980}$

7. Efectúa las siguientes operaciones con raíces, pasando previamente a potencias de exponente fraccionario y expresando los resultados en forma radical:

a) $\sqrt{7} \cdot \sqrt[3]{7^2} \cdot \sqrt[4]{7^3}$ b) $\dfrac{\sqrt[6]{7^5}}{\sqrt[4]{7}}$ c) $\dfrac{\sqrt{\sqrt[3]{7^2}}}{\sqrt[4]{\sqrt{7}}}$

8. a) Si la diagonal de un cuadrado mide $7\sqrt{2}$ cm, ¿cuánto mide exactamente su lado? ¿Y su área?

b) Si el lado del cuadrado mide $7\sqrt{2}$ cm, ¿cuánto mide exactamente su diagonal? ¿Y su área?

9. De los siguientes números expresados en forma radical, indica cuáles son racionales y cuáles no, y da el valor exacto de los que lo sean:

$$A = \sqrt{2{,}25} \qquad B = \sqrt{0{,}\widehat{1}} \qquad C = \sqrt{0{,}4} \qquad D = \sqrt{2{,}\widehat{7}}$$

SOLUCIONES

1. Teniendo en cuenta que: $6 = 2 \cdot 3$; $10 = 2 \cdot 5$; $15 = 3 \cdot 5$; $24 = 2^3 \cdot 3$; $8 = 2^3$ y $48 = 2^4 \cdot 3$ se tiene:

$$N = \frac{(2 \cdot 3)^{-3} \cdot (2 \cdot 5)^{-4} \cdot (3 \cdot 5)^3}{(2^3 \cdot 3)^7 \cdot (2^3)^{-14} \cdot (2^4 \cdot 3)^3} =$$

$$= \frac{2^{-3} \cdot 3^{-3} \cdot 2^{-4} \cdot 5^{-4} \cdot 3^3 \cdot 5^3}{2^{21} \cdot 3^7 \cdot 2^{-42} \cdot 2^{12} \cdot 3^3} = 2^2 \cdot 3^{-10} \cdot 5^{-1} =$$

$$= \frac{2^2}{3^{10} \cdot 5^1}, \text{ por tanto: } \begin{cases} \text{a) } N = 2^2 \cdot 3^{-10} \cdot 5^{-1} \\ \text{b) } N = \dfrac{2^2}{3^{10} \cdot 5^1} \end{cases}$$

2. $a = 10 \cdot 10^6 \text{ km} \cdot \dfrac{10^3 \text{ m}}{1 \text{ km}} \cdot \dfrac{10^2 \text{ cm}}{1 \text{ m}} = 10^{12} \text{ cm}$

$b = 1{,}5 \cdot 10^2 \text{ mg} \cdot \dfrac{1 \text{ g}}{10^3 \text{ mg}} \cdot \dfrac{1 \text{ kg}}{10^3 \text{ g}} \cdot \dfrac{1 \text{ t}}{20^3 \text{ kg}} =$

$= 1{,}5 \cdot 10^{-7} \text{ t}$

$c = 35 \text{ dm}^2 \cdot \dfrac{1 \text{ m}^2}{10^2 \text{ dm}^2} \cdot \dfrac{1 \text{ km}^2}{10^6 \text{ m}^2} = 3{,}5 \cdot 10^{-7} \text{ km}^2$

$d = 250 \text{ l} \cdot \dfrac{1 \text{ m}^3}{10^3 \text{ l}} \cdot \dfrac{10^9 \text{ mm}^3}{1 \text{ m}^3} = 2{,}5 \cdot 10^8 \text{ mm}^3$

3. $A = \sqrt{2} \cdot 6^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot (2 \cdot 3)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{3}{6}} \cdot 2^{\frac{2}{6}} \cdot 3^{\frac{2}{6}} =$

$= 2^{\frac{5}{6}} \cdot 3^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{2^5 \cdot 3^2}$

$B = \dfrac{\sqrt[3]{12}}{3 \cdot \sqrt{2}} = \dfrac{(2^2 \cdot 3)^{\frac{1}{3}}}{3 \cdot 2^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{2^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}}}{3 \cdot 2^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{2^{\frac{4}{6}} \cdot 3^{\frac{2}{6}}}{3^{\frac{6}{6}} \cdot 2^{\frac{3}{6}}} =$

$= 2^{\frac{4}{6} - \frac{3}{6}} \cdot 3^{\frac{2}{6} - \frac{6}{6}} = 2^{\frac{1}{6}} \cdot 3^{-\frac{4}{6}} = 2^{\frac{1}{6}} \cdot 3^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{\sqrt[6]{2}}{\sqrt[6]{3^4}} =$

$= \sqrt[6]{\dfrac{2}{3^4}}$

$C = \dfrac{2^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{-2}}{\sqrt{6}} = \dfrac{2^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{-2}}{(2 \cdot 3)^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{2^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{-2}}{2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{2^{\frac{4}{6}} \cdot 3^{-\frac{12}{6}}}{2^{\frac{3}{6}} \cdot 3^{\frac{3}{6}}} =$

$= 2^{\frac{4}{6} - \frac{3}{6}} \cdot 3^{-\frac{12}{6} - \frac{3}{6}} = 2^{\frac{1}{6}} \cdot 3^{-\frac{15}{6}} = 2^{\frac{1}{6}} \cdot 3^{-\frac{5}{2}} =$

$= \sqrt[6]{\dfrac{2}{3^{15}}}$

4. a) $\dfrac{2x + 6}{5} = 2^3 \longrightarrow x = \dfrac{2^3 \cdot 5 - 6}{2} = 17$

b) $(x - 1)^{\frac{1}{4}} = 5^{\frac{1}{2}} = (5^2)^{\frac{1}{4}} \longrightarrow x - 1 = 5^2 \longrightarrow x = 26$

c) $3^{x+1} = \sqrt[3]{3^2} = 3^{\frac{2}{3}} \longrightarrow x + 1 = \dfrac{2}{3} \longrightarrow x = -\dfrac{1}{3}$

d) $3x = \sqrt[5]{3^3} = 3^{\frac{3}{5}} \longrightarrow x = 3^{\frac{3}{5}} : 3 = 3^{-\frac{2}{5}}$

5. a) $A = \sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{3^2} = \sqrt[6]{9}$; $B = \sqrt{2} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{8}$. El mayor es A.

b) $A = \sqrt[3]{6} = \sqrt[6]{6^2} = \sqrt[6]{36}$; $B = \sqrt{8} = \sqrt[6]{8^3} = \sqrt[6]{512}$. El mayor es B.

c) $A = 8^{\frac{2}{3}} = (2^2)^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{4}{3}} = 2^{\frac{8}{6}}$; $B = 2 \cdot \sqrt[6]{32} = 2 \cdot \sqrt[6]{2^5} = 2 \cdot 2^{\frac{5}{6}} = 2^{\frac{11}{6}}$. El mayor es B.

6. a) $2\sqrt{6} - \sqrt{24} + 3\sqrt{54} = 2\sqrt{6} - \sqrt{4 \cdot 6} + 3\sqrt{9 \cdot 6} = 2\sqrt{6} - 2\sqrt{6} + 9\sqrt{6} = 9\sqrt{6}$

b) $2\sqrt{27} - 3\sqrt{12} + \sqrt{48} = 2\sqrt{9 \cdot 3} - 3\sqrt{4 \cdot 3} + \sqrt{16 \cdot 3} = 6\sqrt{3} - 6\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

c) $3\sqrt{80} + 10\sqrt{180} - 2\sqrt{980} = 3\sqrt{2^4 \cdot 5} + 10\sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5} - 2\sqrt{2^2 \cdot 7^2 \cdot 5} = 12\sqrt{5} + 60\sqrt{5} - 28\sqrt{5} = 44\sqrt{5}$

7. a) $\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[4]{a^3} = a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4}} = a^{\frac{6+8+9}{12}} = a^{\frac{23}{6}} = \sqrt[6]{a^{23}} = a^3\sqrt[6]{a^5}$

b) $\dfrac{\sqrt[6]{a^5}}{\sqrt[4]{a}} = \dfrac{a^{\frac{5}{6}}}{a^{\frac{1}{4}}} = a^{\frac{5}{6} - \frac{1}{4}} = a^{\frac{10-3}{12}} = a^{\frac{7}{12}} = \sqrt[12]{a^7}$

c) $\dfrac{\sqrt{\sqrt[3]{a^2}}}{\sqrt[4]{\sqrt{a}}} = \dfrac{(a^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}}{(a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{4}}} = \dfrac{a^{\frac{2}{6}}}{a^{\frac{1}{8}}} = \dfrac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{8}}} = a^{\frac{1}{3} - \frac{1}{8}} = a^{\frac{8-3}{24}} = a^{\frac{5}{24}} = \sqrt[24]{a^5}$

8. Llamemos L a la longitud del lado, D a la longitud de la diagonal y S al área del cuadrado. Se tiene:

a) Si $D = 7\sqrt{2}$, $D^2 = L^2 + L^2 = 2L^2 \longrightarrow D = \sqrt{2L^2} = L\sqrt{2} \longrightarrow L = 7$ cm, $S = L^2 = 49 \text{ cm}^2$

b) Si $L = 7\sqrt{2}$, $D^2 = 2L^2 = 2 \cdot (7\sqrt{2})^2 = 2^2 \cdot 7^2 \longrightarrow D = 14$ cm y $S = (2\sqrt{7})^2 = 4 \cdot 7 = 28 \text{ cm}^2$

9. $A = \sqrt{2{,}25} = \sqrt{\dfrac{225}{100}} = \sqrt{\dfrac{15^2}{20^2}} = \dfrac{15}{10} = 1{,}5$. Racional

$B = \sqrt{0{,}\widehat{1}} = \sqrt{\dfrac{1}{9}} = \sqrt{\dfrac{1}{3^2}} = \dfrac{1}{3}$. Racional

$C = \sqrt{0{,}4} = \sqrt{\dfrac{4}{10}} = \dfrac{2}{\sqrt{10}}$. Irracional

$D = \sqrt{2{,}\widehat{7}} = \sqrt{\dfrac{27 - 2}{9}} = \sqrt{\dfrac{25}{9}} = \dfrac{5}{3} = 1{,}\widehat{6}$. Racional