5 Inecuaciones

1. Resuelve y representa sobre la recta real las soluciones de las siguientes inecuaciones:

a) $\dfrac{5x - 2}{3} - \dfrac{x - 8}{4} > \dfrac{x + 14}{2} - 2$

b) $\dfrac{x - 3}{3} - \dfrac{x + 5}{2} \leqslant \dfrac{x}{4} - 1$

2. Se desea obtener 60 kilos de una mezcla de café puro de 4,50 € el kilo y torrefacto de 2,50 € el kilo, de forma que el kilo de mezcla no supere los 3 € el kilo. ¿Cuántos kilos de café y torrefacto debemos mezclar?

3. Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones y representa sus soluciones sobre la recta real:

$$\begin{cases} \dfrac{x + 1}{3} - \dfrac{x - 3}{2} \geqslant x - \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{x - 2}{2} - \dfrac{x - 1}{3} \leqslant 1 + x \end{cases}$$

4. En unos grandes almacenes en época de rebajas, un vendedor le dice a un comprador lo siguiente: «En estos almacenes, por un artículo de 30 € usted pagará entre 21 € y 24 €». ¿Cuál puede ser el porcentaje de rebaja que se está aplicando?

5. Resuelve las siguientes inecuaciones y representa sus soluciones en la recta real:

a) $(2x - 1)^2 - 2(x + 1)(x - 1) \leqslant 3(2 - x)$

b) $4x(x + 3) \geqslant 5(3 - x)$

6. Determina para qué valores de m la ecuación $8x^2 - (m - 1)x + m - 7 = 0$ tiene dos raíces reales. ¿En qué casos la ecuación tiene las raíces iguales?

7. Resuelve y representa las soluciones de las inecuaciones:

a) $\dfrac{1}{x - 3} \geqslant \dfrac{2}{x + 3}$

b) $\dfrac{x - 2}{x + 1} \leqslant \dfrac{x}{x - 1} - 2$

8. Se desea enmarcar un lienzo sobre una tabla cuadrada cuyo precio es de 3 € el metro cuadrado, siendo el marco un junquillo metálico cuyo precio es de 3,75 € el metro lineal. Determina cuál debe ser como máximo el lado de la tabla si se dispone para ello de no más de 18 € de presupuesto.

9. Dibuja el recinto cerrado definido por el sistema de inecuaciones siguiente:

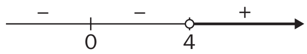
$$\{y \geqslant x;\ x + y \leqslant 4;\ x \geqslant 0;\ y \leqslant 3\}$$

y calcula su área, suponiendo que x e y están medidas en metros.

SOLUCIONES

1. a) Operando: $11x - 44 > 0$; $x - 4 > 0$; $x > 4$

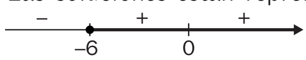
Solución: $(4, +\infty)$



b) Operando: $-5x - 30 \leqslant 0$; $x + 6 \geqslant 0$; $x \geqslant -6$

Solución: $[-6, +\infty)$

Las soluciones están representadas en la figura.



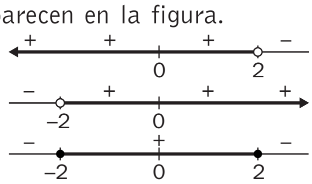
2. Si x es el número de kilos de café puro y $60 - x$ el número de kilos de torrefacto, se tiene:
$4{,}5x + 2{,}5(60 - x) < 3 \cdot 60 \longrightarrow 2x - 30 < 0 \longrightarrow$
$\longrightarrow x < 15$, indica que como máximo hemos de mezclar 15 kilos de café puro. Por otro lado:
$x < 15 \longrightarrow -x > -15 \longrightarrow 60 - x > 60 - 15 \longrightarrow$
$\longrightarrow 60 - x > 45$, lo que indica que como mínimo hemos de mezclar 45 kilos de torrefacto.

3. Operando:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{14 - 7x}{6} \geqslant 0\\ \dfrac{-5x - 10}{6} \leqslant 0\end{array}\right\} \begin{array}{l}214 - 7x \geqslant 0;\ x \leqslant \ \ 2\\ \ \ 5x + 10 \geqslant 0;\ x \geqslant -2\end{array}\Big\}$$

Solución: $[-2, 2]$

La solución del sistema y de cada inecuación que lo compone aparecen en la figura.



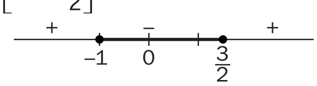
4. Sea x el porcentaje de rebaja, el precio del artículo es $30 - 30 \cdot \dfrac{x}{100} = 30 - 0{,}3x$; se tiene por tanto:
$21 \leqslant 30 - 0{,}3x \leqslant 24 \longrightarrow$

$$\longrightarrow \begin{cases} 21 \leqslant 30 - 0{,}3x \longrightarrow 0{,}3x \leqslant 9 \longrightarrow \\ \quad \longrightarrow x \leqslant 30\ \% \\ 30 - 0{,}3x \leqslant 24 \longrightarrow -0{,}3x \leqslant -6 \longrightarrow \\ \quad \longrightarrow x \geqslant 20\ \% \end{cases}$$

Los almacenes rebajan entre el 20 % y el 30 %

5. a) Operando: $2x^2 - x - 3 \leqslant 0$; $(x + 1)(2x - 3) \leqslant 0$

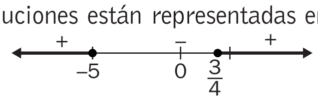
Solución: $\left[-1, \dfrac{3}{2}\right]$



b) $4x^2 + 17x - 15 \geqslant 0$; $(x + 5)(4x - 3) \geqslant 0$.

Solución: $(-\infty, -5] \cup \left[\dfrac{3}{4}, +\infty\right)$

Ambas soluciones están representadas en la figura.



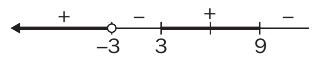
6. Para que la ecuación tenga dos raíces reales debe cumplirse: $(m - 1)^2 - 4 \cdot 8 \cdot (m - 7) \geqslant 0$, por tanto:

$m^2 - 34m + 225 \geqslant 0$; $(m - 9)(m - 25) \geqslant 0$

$\begin{cases} m \geqslant 9 \text{ y } m \geqslant 25;\ m \geqslant 25 \\ m \leqslant 9 \text{ y } m \leqslant 25;\ m \leqslant \ \ 9\end{cases}$. Por tanto, hay dos raíces reales si se verifica $m \leqslant 9$ o bien $m \geqslant 25$. Las dos raíces son iguales para $m = 9$ o para $m = 25$.

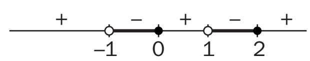
7. a) Operando: $\dfrac{1}{x - 3} - \dfrac{2}{x + 3} \geqslant 0$; $\dfrac{6 - x}{(x - 3)(x + 3)} \geqslant 0$.

Solución: $(-\infty, -3)$ y $(3, 6]$

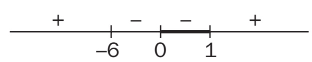


b) $\dfrac{x - 2}{x + 1} - \dfrac{x}{x - 1} + 2 \leqslant 0$; $\dfrac{2x(x - 2)}{(x + 1)(x - 1)} \leqslant 0$.

Solución: $(-1, 0]$ y $(1, 2]$



8. Longitud en metros del lado del cuadrado: $x > 0$.



Coste de la madera y el junquillo:

$$3x^2 + 3{,}75 \cdot 4x = 3x^2 + 15x \text{ €}$$

Como no se dispone de más de 18 €, debe ser:

$$3x^2 + 15x \leqslant 18;\ 3x^2 + 15x - 18 \leqslant 0$$

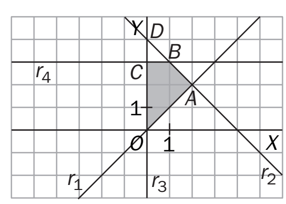
Factorizando:

$3(x - 1)(x + 6) \leqslant 0$; $(x - 1)(x + 6) \leqslant 0$; $-6 \leqslant x \leqslant 1$

Como $x > 0$, el mayor cuadrado tiene 1 m de lado.

9. El recinto es el interior cuadrilátero $OABC$ delimitado por las rectas:

r_1: $y = x$;
r_2: $x + y = 4$;
r_3: $x = 0$;
r_4: $y = 3$



Sus vértices tienen de coordenadas: $O(0, 0)$; $A(2, 2)$; $B(1, 3)$ y $C(0, 3)$, siendo el punto $D(0, 4)$. El área se calcula como diferencia de las áreas de 2 triángulos:

$$S_{OABC} = S_{OAD} - S_{CBD} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \longrightarrow$$
$$\longrightarrow S_{OABC} = 3{,}5 \text{ m}^2$$